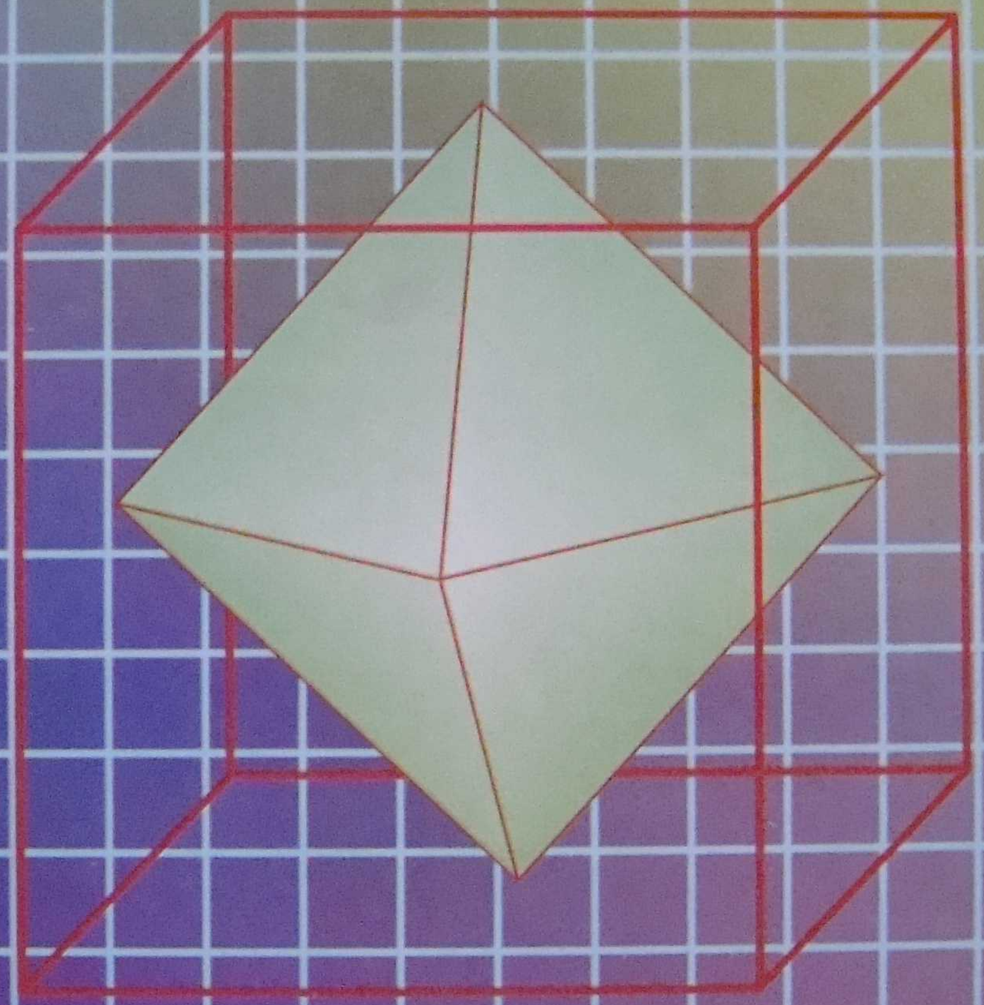
ԵՐԿՐԱՉՓՈՒԹՅՈՒՆ

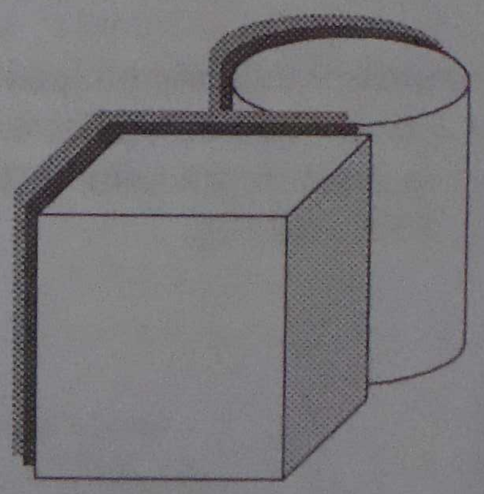


10

Լ. Ս. ԱԹԱՆԱՍՅԱՆ, Վ. Ֆ. ԲՈՒՏՈՒԶՈՎ,
Ս. Բ. ԿԱԴՈՄՑԵՎ, Լ. Ս. ԿԻՍԵԼՅՈՎԱ, Է. Գ. ՊՈԶՆՅԱԿ

ԷՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ 10

Հանրակրթական դպրոցի 10-րդ դասարանի դասագիրք



Երևան, «Ասողիկ գրատուն»
2005թ.

ՀՏԴ 373.167.1:514(075)
ԳՄԴ 22.151գ72
Ե 894

ԴԱՍԱԳԻՐՔԸ ՀԱՍՏԱՏՎԱԾ Է ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅԱՆ ԿՈՂՄԻՑ

Թարգմանված է ռուսերեն 9-րդ հրատարակությունից:
Դասագիրքը համապատասխանեցված է առարկայական ծրագրին, կատարված են փոփոխություններ

Թարգմանությունը, փոփոխությունը և խմբագրումը՝ Ս. Է. Հակոբյան

Մեթոդիստ՝ Ռ. Ս. Խաչատրյան
Խորհրդատվությունը՝ Ս. Ք. Հարությունյան

Ե 894 **Երկրաչափություն:** Հանրակրթական դպրոցի 10-րդ դասարանի դասագիրք / Լ. Ս. Աթանասյան, Վ. Ֆ. Բուտուզով, Ս. Բ. Կադոմցև և ուրիշ.; /թարգմ. և փոփոխ. Ս. Է. Հակոբյան. -- Եր., Աստղիկ գրատուն, 2001, -144 էջ:

Ե $\frac{4306020502}{860(01)-2001}$ 2001

ԳՄԴ 22.151գ72

ISBN 99930-893-5-4

© «*Աստղիկ գրատուն*» հրատարակչություն, 2001թ
© Թարգմ., փոփոխ. Ս. Է. Հակոբյան, 2001թ
© «*Просвещение*» հրատարակչություն, 2000թ
Все права защищены
Բոլոր իրավունքները պաշտպանված են

ԳԼՈՒԽ I

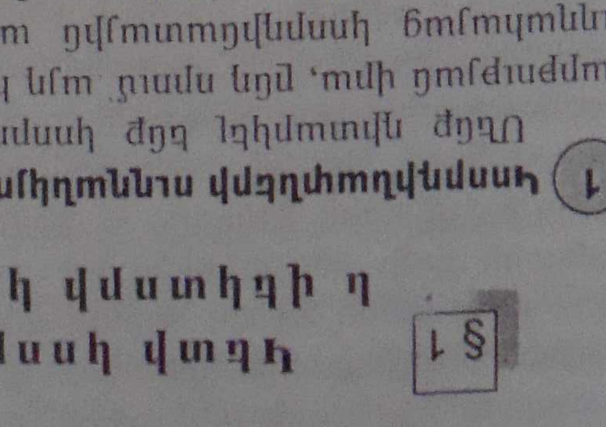
ՀԱՄԱՐԱԿԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ ԵՌԱՉԱՓ ՎԵՑԱՉՈՒՓՈՒՄՆԵՐԻ

§ 1 ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ ԵՎ ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ՎՐԱ ԿԱՏԱՐՎՈՂ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

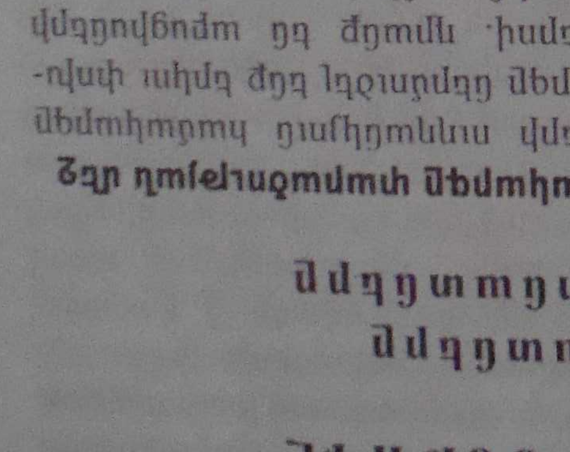
1 **Կոորդինատական առանցքների ուղղաձիգ վեկտորներ**

Ընդունենք, որ տարածության մեջ ընտրված է որևէ աջ ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգ. այն կոչվում է նաև աջ ուղղանկյուն Դեկարտի կոորդինատական համակարգ: Կոորդինատական առանցքների ուղղաձիգ վեկտորներ են կոչվում այն վեկտորները, որոնք ունեն առանցքների ուղղությունները, ինչպես նաև ելակետ ընդունված կոորդինատների սկզբնակետը: Կոորդինատական առանցքների ուղղաձիգ վեկտորներ են կոչվում նաև այդ առանցքների ուղղությամբ ուղղված միավոր վեկտորները: Նշանակենք O սկզբնակետի, Ox, Oy, Oz առանցքների ուղղաձիգ վեկտորները համապատասխանաբար $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ տառերով (նկ. 1):

Ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգում ցանկացած վեկտոր կարելի է **վեկտորի առանցքային վերլուծություն** կոչվող եղանակով ներկայացնել այդ առանցքների ուղղաձիգ վեկտորների միջոցով: Այդ վերլուծությունը հիմնված է հետևյալ պնդման վրա.



Նկ. 1



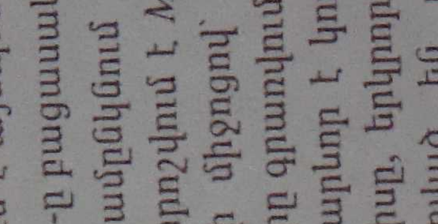
Նկ. 2

---

* Նշենք, որ հատվածների չափման ընտրված միավորի սկզբնական յուրաքանչյուր հատվածի երկարությունը արտահայտում է որևէ թիվ: Այս գլխում ասելով հատվածի երկարություն՝ միայն այդ թիվը:

O կետը կոորդինատների սկզբնակետն է, իսկ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ միավոր վեկտորները՝ կոորդինատային առանցքերի ուղղությամբ ուղղված կոորդինատական վեկտորները: Ցանկացած M կետի համար $\overrightarrow{OM}$ վեկտորը կոչվում է **շառավիղ վեկտոր**, իսկ նրա ճշտությամբ որոշվում է **տարածության կետի դեկարտյան կոորդինատների համակարգ**:

Կոորդինատների սկզբնակետ անվանում է բոլոր կոորդինատների զրո արժեքներին համապատասխանող կետը: Կոորդինատական առանցքերի վրա կետերի կոորդինատները գտնելու համար անհրաժեշտ է կատարել հետևյալ գործողությունները: Դրանք որոշվում են M կետից կոորդինատական առանցքերին տարված հարթությունների հավասարումներով: Օրինակ՝ M կետի x կոորդինատը գտնելու համար անհրաժեշտ է գտնել Oyz հարթությանը զուգահեռ և M կետով անցնող հարթության հավասարումը: Այդ հարթությունը կհատի Ox առանցքը M_1 կետում, և M_1-ի x կոորդինատը կհամընկնի M կետի x կոորդինատի հետ (նկ. 2): M կետի առաջին կոորդինատը (այլ կերպ ասած՝ M_1-ի կոորդինատը) կոչվում է **աբսցիսա**, երկրորդը՝ **օրդինատ**, իսկ երրորդը՝ **ապլիկատ**: Նշանակենք այդ հարթությունների հատման կետերը M_2-ով, M_3-ով և M_4-ով: Այդ դեպքում M կետի y կոորդինատը կհամընկնի M_2 կետի y կոորդինատի հետ, իսկ z կոորդինատը՝ M_3 կետի z կոորդինատի հետ: Ստացված M_1, M_2 և M_3 կետերը լիովին որոշում են M կետի դիրքը տարածության մեջ: Նշենք, որ M կետի կոորդինատները նշելիս նրա առաջին տեղում միշտ գրում են աբսցիսան, երկրորդ տեղում՝ օրդինատը, երրորդում՝ ապլիկատը: Նկար 3-ում պատկերված $A(9; 5; 10)$, $B(4; -3; 6)$, $C(9; 0; 0)$, $D(4; 0; 5)$, $E(0; 8; 0)$, $F(0; 0; -3)$:



Նկ. 4

Եթե $M(x;y;z)$ կետը ընկած է կոորդինատների առանցքի վրա, ապա նրա կոորդինատներից երկուսը հավասար են զրոյի: Այսպես, եթե $M \in Oxy$, ապա $z=0$: Եթե $M \in Oxz$, ապա $y=0$, իսկ եթե $M \in Oyz$, ապա $x=0$: Եթե $M \in Ox$, ապա M կետի օրդինատը և ապլիկատը հավասար են զրոյի. $y=0$ և $z=0$ (օրինակ՝ C կետը նկար 3-ում): Եթե $M \in Oy$, ապա $x=0$ և $z=0$, իսկ եթե $M \in Oz$, ապա $x=0$ և $y=0$: Կոորդինատների սկզբնակետի կոորդինատները հավասար են զրոյի. $O(0; 0; 0)$:

Նկ. 3

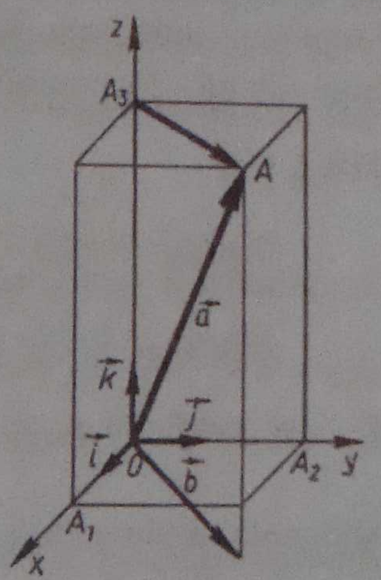
2 Վեկտորի կոորդինատները

Տարածության մեջ ներմուծենք $Oxyz$ կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգ: Դրական կիսառանցքներից յուրաքանչյուրի վրա կոորդինատների սկզբնակետից տեղադրենք **միավոր վեկտոր**, այսինքն՝ վեկտոր, որի երկարությունը հավասար է միավորի: Աբսցիսների առանցքի միավոր վեկտորը նշանակենք $\vec{i}$-ով, օրդինատների առանցքի միավոր վեկտորը՝ $\vec{j}$-ով, ապլիկատների առանցքի միավոր վեկտորը՝ $\vec{k}$-ով (նկ. 4): $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ վեկտորներն անվանենք **կոորդինատային վեկտորներ:** Ակնհայտ է, որ այդ վեկտորները տարահարթ են: Ուրեմն՝ **ցանկացած $\vec{a}$ վեկտոր կարելի է վերածել ըստ կոորդինատային վեկտորների, այսինքն՝ ներկայացնել**

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

տեսքով, ընդ որում՝ վերածման գործակիցները՝ x-ը, y-ը, z-ը, որոշվում են միակ կերպով:

$\vec{a}$ վեկտորի՝ ըստ կոորդինատային վեկտորների վերածման x, y, z գործակիցները կոչվում են **$\vec{a}$ վեկտորի կոորդինատներ՝ տրված կոորդինատների համակարգում:** $\vec{a}$ վեկտորի կոորդինատները գրառում են ձևավոր փակագծերի մեջ՝ վեկտորի նշանակումից հետո. $\vec{a}\{x; y; z\}$: Նկար 5-ում պատկերված է ուղղանկյունանիստ, որի չափումներն են $OA_1=2$, $OA_2=2$, $OA_3=4$: Այդ նկարում պատկերված վեկտորների կոորդինատները հետևյալներն են. $\vec{a}\{2;2;4\}$, $\vec{b}\{2;2;-1\}$, $\vec{A_3A}\{2;2;0\}$, $\vec{i}\{1;0;0\}$, $\vec{j}\{0;1;0\}$, $\vec{k}\{0;0;1\}$:



Նկ. 5

Քանի որ զրոյական վեկտորը կարելի է ներկայացնել $\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$ տեսքով, ուրեմն զրոյական վեկտորի բոլոր կոորդինատները զրո են: Այնուհետև, **հավասար վեկտորների համապատասխան կոորդինատները հավասար են,** այսինքն՝ եթե $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ և $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ վեկտորները հավասար են, ապա $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ և $z_1=z_2$ (պարզաբանեք՝ ինչու):

Քննության առնենք այն կանոնները, որոնք թույլ են տալիս ըստ տրված վեկտորների կոորդինատների գտնել նրանց գումարի և տարբերության կոորդինատները, ինչպես նաև տրված վեկտորի և տրված թվի արտադրյալի կոորդինատները:

1°. Երկու կամ ավելի վեկտորների գումարի յուրաքանչյուր կոորդինատը հավասար է այդ վեկտորների համապատասխան կոորդինատների գումարին: Այլ խոսքով՝ եթե $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$-ը և $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$-ը տրված վեկտորներ են, ապա $\vec{a}+\vec{b}$ վեկտորն ունի $\{x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2\}$ կոորդինատները:

2°. Երկու վեկտորների տարբերության յուրաքանչյուր կոորդինատը հավասար է այդ վեկտորների համապատասխան կոորդինատների տարբերությանը: Այլ խոսքով՝ եթե $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$-ը և $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$-ը տրված վեկտորներ են, ապա $\vec{a}-\vec{b}$ վեկտորն ունի $\{x_1-x_2; y_1-y_2; z_1-z_2\}$ կոորդինատները:

3°. Վեկտորի և թվի արտադրյալի յուրաքանչյուր կոորդինատը հավասար է վեկտորի համապատասխան կոորդինատի և այդ թվի արտադրյալին: Այլ խոսքով՝ եթե $\vec{a}\{x; y; z\}$-ը տրված վեկտոր է, և α-ն՝ տրված թիվ, ապա $\alpha\vec{a}$ վեկտորն ունի $\{\alpha x; \alpha y; \alpha z\}$ կոորդինատները:

1^0–3^0 պնդումներն ապացուցվում են համանման ձևով՝ ինչպես հարթության վրա դիտարկվող վեկտորների համար:

Դիտարկված կանոնները թույլ են տալիս որոշել ցանկացած վեկտորի կոորդինատները, եթե այդ վեկտորն արտահայտված է այնպիսի վեկտորների հանրահաշվական գումարի տեսքով, որոնց կոորդինատները հայտնի են: Դիտարկենք օրինակ.

Խնդիր

Գտնել $\vec{p}=2\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}$ *վեկտորի կոորդինատները, եթե* $\vec{a}\{1; -2; 0\}$, $\vec{b}\{0; 3; -6\}$, $\vec{c}\{-2; 3; 1\}$:

Լուծում: Ըստ 3^0 կանոնի՝ $2\vec{a}$ վեկտորն ունի $\{2; -4; 0\}$ կոորդինատները, իսկ $\left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right)$ վեկտորը՝ $\{0; -1; 2\}$ կոորդինատները: Քանի որ $\vec{p}=(2\vec{a})+\left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right)+\vec{c}$, ապա նրա $\{x; y; z\}$ կոորդինատները կարելի է հաշվել ըստ 1^0 կանոնի. $x=2+0-2=0$, $y=-4-1+3=-2$, $z=0+2+1=3$: Այսպիսով՝ $\vec{p}$ վեկտորի կոորդինատներն են $\{0; -2; 3\}$:

3 Վեկտորների կոորդինատների և կետերի կոորդինատների կապը

Վեկտորը, որի վերջը համընկնում է տրված կետին, իսկ սկիզբը՝ կոորդինատների սկզբնակետին, կոչվում է տրված կետի **շառավիղ-վեկտոր:** Ապացուցենք, որ **ցանկացած կետի կոորդինատները հավասար են նրա շառավիղ-վեկտորի համապատասխան կոորդինատներին:**

Տրված M կետի կոորդինատները նշանակենք $(x; y; z)$: Դիցուք M_1-ը, M_2-ը, M_3-ը կոորդինատային առանցքների և այն հարթությունների հատման կետերն են, որոնք անցնում են M կետով՝ այդ առանցքներին ուղղահայաց (նկ. 6): Այդ դեպքում

$$\vec{OM}=\vec{OM_1}+\vec{OM_2}+\vec{OM_3}: \qquad (1)$$

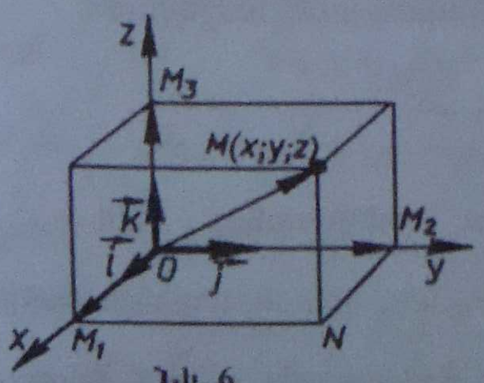
Ապացուցենք, որ $\vec{OM_1} = x\vec{i}$: Իսկապես, եթե M_1 կետն ընկած է աբսցիսների դրական կիսառանցքի վրա, ինչպես նկար 6-ում է, ապա $x=OM_1$, իսկ $\vec{OM_1}$ և $\vec{i}$ վեկտորները համուղղված են: Ուրեմն $\vec{OM_1} = OM_1 \cdot \vec{i} = x\vec{i}$:

Եթե M_1 կետն ընկած է աբսցիսների բացասական կիսառանցքի վրա, ապա $x=-OM_1$, իսկ $\vec{OM_1}$ և $\vec{i}$ վեկտորները հակուղղված են: Ուրեմն $\vec{OM_1} = -OM_1 \cdot \vec{i} = x\vec{i}$: Վերջապես, եթե M_1 կետը համընկնում է O սկզբնակետին, ապա $x=0$, $\vec{OM_1} = \vec{0}$: Ուրեմն $x\vec{i} = \vec{0}$, և դարձյալ տեղի ունի $\vec{OM_1} = x\vec{i}$ հավասարությունը: Այսպիսով բոլոր դեպքերում $\vec{OM_1} = x\vec{i}$: Համանման ձևով ապացուցվում է, որ $\vec{OM_2} = y\vec{j}$, և $\vec{OM_3} = z\vec{k}$:

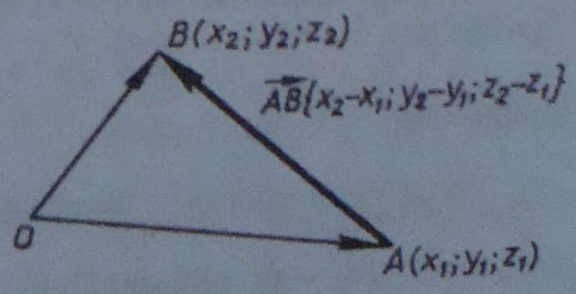
Այդ արտահայտությունները տեղադրելով (1) հավասարության մեջ ստացվում է $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$:

Դրանից հետևում է, որ $\vec{OM}$ վեկտորի կոորդինատները հավասար են $\{x; y; z\}$, այսինքն M կետի կոորդինատները հավասար են $\vec{OM}$ շառավիղ-վեկտորի համապատասխան կոորդինատներին. ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Օգտվելով ապացուցված պնդումից $\vec{AB}$ վեկտորի կոորդինատներն արտահայտենք նրա A և B ծայրակետերի կոորդինատներով: Դիցուք $\vec{AB}$ վեկտորի սկիզբը A-ն, ունի $(x_1; y_1; z_1)$ կոորդինատները, իսկ վերջը B-ն $(x_2; y_2; z_2)$ կոորդինատները: $\vec{AB}$ վեկտորը հավասար է $\vec{OB}$ և $\vec{OA}$ վեկտորների տարբերությանը (նկ. 7): Ուրեմն նրա կոորդինատները հավասար են $\vec{OB}$ և $\vec{OA}$ վեկտորների համապատասխան կոորդինատների տարբերություններին:



Նկ. 6



Նկ. 7

Սակայն, $\vec{OB}$ և $\vec{OA}$ վեկտորների կոորդինատները համընկնում են B և A կետերի համապատասխան կոորդինատներին. $\vec{OB}\{x_2; y_2; z_2\}$, $\vec{OA}\{x_1; y_1; z_1\}$: Ուրեմն՝ $\vec{AB}$ վեկտորի կոորդինատներն են $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$:

Այսպիսով՝ **վեկտորի յուրաքանչյուր կոորդինատը հավասար է նրա վերջի և սկզբի համապատասխան կոորդինատների տարբերությանը:**

4 Պարզագույն խնդիրներ կոորդինատներով

ա) Հատվածի միջնակետի կոորդինատները

$Oxyz$ կոորդինատների համակարգում նշենք A կետ, որի կոորդինատներն են $(x_1; y_1; z_1)$, և B կետ, որի կոորդինատներն են $(x_2; y_2; z_2)$: AB հատվածի C միջնակետի $(x;y;z)$ կոորդինատներն արտահայտենք այդ հատվածի ծայրակետերի կոորդինատներով (նկ. 8):

Քանի որ C կետը AB հատվածի միջնակետն է, ապա

$$\vec{OC} = \frac{1}{2}\left(\vec{OA} + \vec{OB}\right) \qquad (2)$$

(Այս պնդումն ապացուցվել է հարթաչափության դասընթացում. տե՛ս 8-րդ դաս. դասագրքի կետ 46-ը):

$\vec{OC}$, $\vec{OA}$ և $\vec{OB}$ վեկտորների կոորդինատները հավասար են C, A և B երեք կետերի համապատասխան կոորդինատներին, այսինքն՝ $\vec{OC}\{x; y; z\}$; $\vec{OA}\{x_1; y_1; z_1\}$; $\vec{OB}\{x_2; y_2; z_2\}$: Այժմ (2) հավասարությունը գրառենք կոորդինատներով, կստանանք.

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2);\ y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2);\ z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2):$$

Այսպիսով՝ **հատվածի միջնակետի յուրաքանչյուր կոորդինատը հավասար է նրա ծայրակետերի համապատասխան կոորդինատների կիսագումարին:**

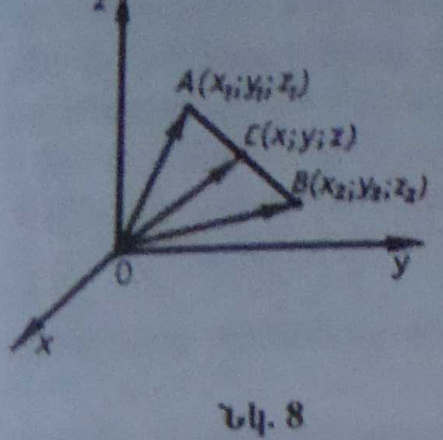
բ) Վեկտորի երկարության հաշվումը նրա կոորդինատներով

Ապացուցենք, որ $\bar{a}\{x; y; z\}$ վեկտորի երկարությունը հաշվվում է

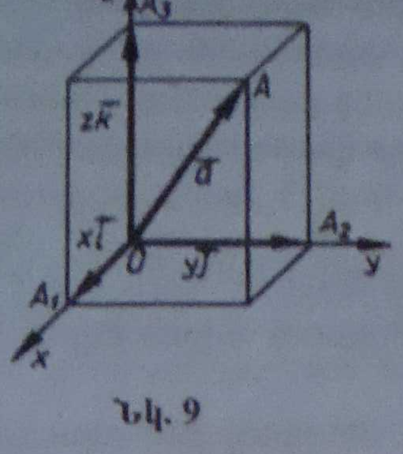
$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (3)$$

բանաձևով:

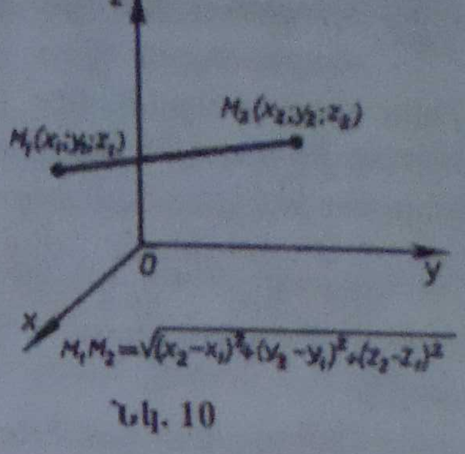
Կոորդինատների առանցքների վրա տեղադրենք $\vec{OA_1} = x\vec{i}$; $\vec{OA_2} = y\vec{j}$; $\vec{OA_3} = z\vec{k}$ վեկտորները և դիտարկենք այդ վեկտորների գումարը՝ $\vec{OA} = \vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \bar{a}$ (նկ. 9): Ցույց տանք, որ $\vec{OA}$ վեկտո-



Նկ. 8



Նկ. 9



Նկ. 10

րի երկարությունը $\vec{OA_1}$, $\vec{OA_2}$ և $\vec{OA_3}$ վեկտորների երկարությունների միջոցով արտահայտվում է հետևյալ կերպ՝

$$\left|\vec{OA}\right| = \sqrt{\left|\vec{OA_1}\right|^2 + \left|\vec{OA_2}\right|^2 + \left|\vec{OA_3}\right|^2} : \qquad (4)$$

Իսկապես, եթե A կետն ընկած չէ կոորդինատային հարթությունների վրա (տե՛ս նկ. 9), ապա (4) հավասարությունը տեղի ունի՝ ըստ ուղղանկյունանիստի անկյունագծի հատկության. $OA^2=OA_1^2+OA_2^2+OA_3^2$: A կետի մյուս բոլոր դասավորությունների դեպքերում (A կետն ընկած է կոորդինատային հարթության կամ կոորդինատների առանցքի վրա) (4) հավասարությունը դարձյալ տեղի ունի (այդ դեպքերը դիտարկեք ինքնուրույն):

Քանի որ $\left|\vec{OA_1}\right| = \left|x\vec{i}\right| = |x|$, $\left|\vec{OA_2}\right| = \left|y\vec{i}\right| = |y|$, $\left|\vec{OA_3}\right| = \left|z\vec{i}\right| = |z|$, և $\vec{OA} = \vec{a}$, ապա (4) հավասարությունից ստանում ենք (3) բանաձևը.

$$|\vec{a}| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} :$$

գ) Երկու կետերի հեռավորությունը

Դիտարկենք կամայական երկու կետեր՝ M_1 կետը, որն ունի $(x_1;y_1;z_1)$ կոորդինատները, և M_2 կետը, որն ունի $(x_2;y_2;z_2)$ կոորդինատները (նկ. 10): M_1 և M_2 կետերի d հեռավորությունն արտահայտենք նրանց կոորդինատներով:

Այդ նպատակով դիտարկենք $\vec{M_1M_2}$ վեկտորը: Նրա կոորդինատներն են $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$: Ըստ (3) բանաձևի՝ $\left|\vec{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$: Բայց $\left|\vec{M_1M_2}\right| = d$: Այսպիսով՝ $M_1(x_1; y_1; z_1)$ և $M_2(x_2; y_2; z_2)$ կետերի հեռավորությունը հաշվվում է

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (5)$$ բանաձևով:

5 Հարթության վրա գծի հավասարումը

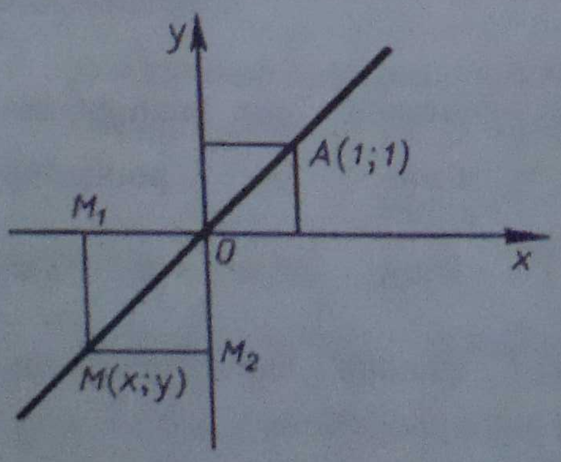
Հարթության վրա կոորդինատների համակարգը կարելի է դիտել իբրև տարածության մեջ կոորդինատների համակարգի մասնավոր դեպք, երբ բացակայում է երրորդ z կոորդինատը: Օրինակ, Oxy կոորդինատային հարթության մեջ $M_1(x_1; y_1)$ և $M_2(x_2; y_2)$ կետերի հեռավորությունը հաշվելու հարթաչափության դասընթացից հայտնի $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ բանաձևը ներկայացնում է վերևում արտածված (5) բանաձևի մասնավոր դեպքը:

Քննության առնենք հարթության վրա կոորդինատների մեթոդի կիրառության մի քանի այնպիսի օրինակներ, որոնցով ավելի ակնառու է դառնում երկրաչափության և հանրահաշվի միջև եղած կապը:

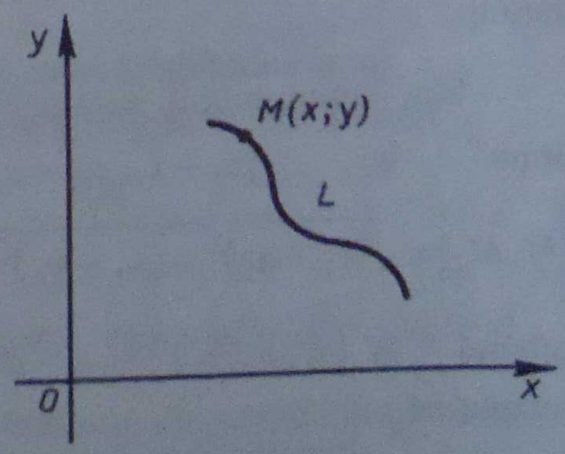
Հանրահաշվի դասընթացում մենք կառուցել ենք որոշ ֆունկցիաների գրաֆիկները կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգում, օրինակ՝ $y=x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Հայտնի է, որ այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը ուղիղ է, որն անցնում է $O(0; 0)$ և $A(1; 1)$ կետերով (նկ. 11): OA ուղղի վրա ընկած կամայական $M(x; y)$ կետի կոորդինատները բավարարում են $y=x$ հավասարմանը (քանի որ $MM_1=MM_2$), իսկ OA ուղղի վրա չընկած ցանկացած կետի կոորդինատներն այդ հավասարմանը չեն բավարարում: Այդ դեպքում ասում են, որ $y=x$ հավասարումը OA ուղղի հավասարումն է: Համանման ձևով ներմուծվում է կամայական գծի հավասարման հասկացությունը:

Դիցուք՝ հարթության վրա ներմուծված է Oxy ուղղանկյուն կոորդինատների համակարգը, և տրված է որևէ L գիծ (նկ. 12): x և y երկու փոփոխականով հավասարումը կոչվում է L գծի հավասարում, եթե այդ հավասարմանը բավարարում են L գծի ցանկացած կետի կոորդինատները, և չեն բավարարում այդ գծի վրա չընկած ոչ մի կետի կոորդինատներ:

Գծերը կոորդինատների մեթոդով հետազոտելիս առաջանում են երկու փոխհակադարձ խնդիրներ. 1) տրված գծի երկրաչափական հատկությունների միջոցով գտնել նրա հավասարումը, 2) գծի՝ տրված հավասարման միջոցով հետազոտել նրա երկրաչափական հատկությունները: Այդ խնդիրներից առաջինը այստեղ մենք կդիտարկենք շրջանագծի և



Նկ. 11



Նկ. 12

ուղղի համար, իսկ երկրորդ խնդիրը դիտարկվում է հանրահաշվի դասընթացում՝ ֆունկցիայի գրաֆիկներ կառուցելիս:

ա. Շրջանագծի հավասարումը

Դիցուք՝ Oxy կոորդինատային հարթության մեջ տրված R շառավիղով շրջանագծի կենտրոնը C կետն է, որն այդ հարթությունում ունի $(x_0;y_0)$ կոորդինատները (նկ. 13): Տվյալ հարթության կամայական $M(x;y)$ կետի և $C(x_0;y_0)$ կենտրոնի հեռավորությունը որոշվում է $CM=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ բանաձևով: Եթե M կետն ընկած է C կենտրոնով շրջանագծի վրա, ապա $MC=R$, կամ՝ $MC^2=R^2$: Ուրեմն՝ M կետի կոորդինատները բավարարում են $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ հավասարմանը:

Եթե $M(x;y)$ կետն ընկած չէ տրված շրջանագծի վրա, ապա $MC^2\neq R^2$ և, ուրեմն, M կետի կոորդինատները տվյալ հավասարմանը չեն բավարարում: **Հետևաբար Oxy կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգում R շառավիղով և $C(x_0;y_0)$ կենտրոնով շրջանագծի հավասարումն ունի**

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \qquad (6)$$ տեսքը:

Մասնավորապես, եթե շրջանագծի կենտրոնը կոորդինատների սկզբնակետն է, ապա հավասարումն ունի

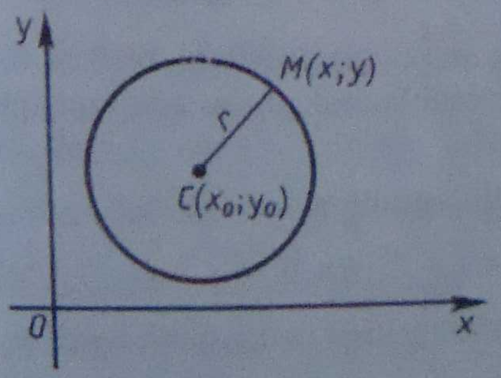
$$x^2+y^2=R^2$$ տեսքը:

բ. Ուղղի հավասարումը

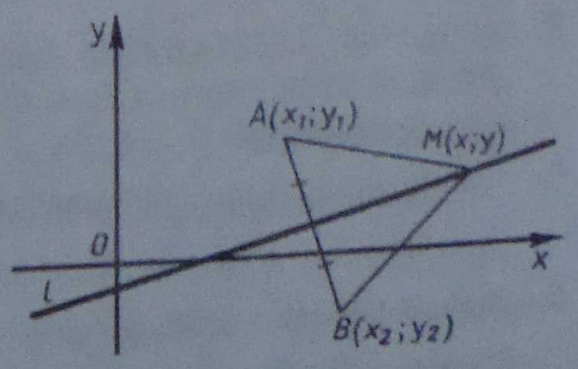
Արտածենք տրված ℓ ուղղի հավասարումը հարթության վրա ներմուծված ուղղանկյուն կոորդինատների համակարգում: Նշենք $A(x_1;y_1)$ և $B(x_2;y_2)$ երկու կետերն այնպես, որ ℓ ուղիղը լինի AB հատվածի միջնուղղահայացը (նկ. 14): Եթե $M(x;y)$ կետն ընկած է ℓ ուղղի վրա, ապա $AM=BM$, կամ՝ $AM^2=BM^2$, այսինքն՝ M կետի կոորդինատները բավարարում են հետևյալ հավասարմանը.

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2 : \qquad (7)$$

Եթե $M(x;y)$ կետն ընկած չէ ℓ ուղղի վրա, ապա $AM^2\neq BM^2$ և, ուրեմն, M կետի կոորդինատները (7) հավասարմանը չեն բավարարում: Հետևաբար (7) հավասարումը ℓ ուղղի հավասարումն է կոորդինատների տրված համակարգում:



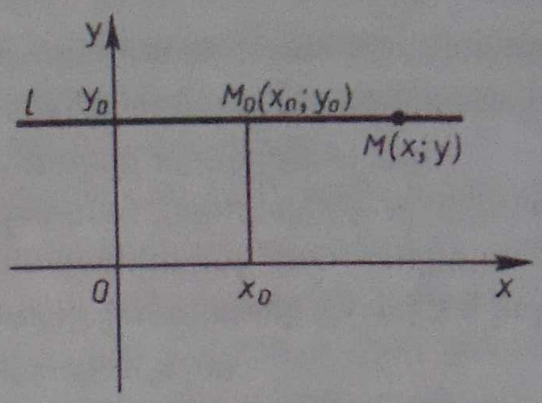
Նկ. 13



Նկ. 14

Կատարելով պարզ ձևափոխություններ՝ (7) հավասարումն ընդունում է $ax+by+c=0$ տեսքը, որտեղ $a=2(x_1-x_2)$, $b=2(y_1-y_2)$, $c=x_2^2+y_2^2-x_1^2-y_1^2$: Քանի որ $A(x_1; y_1)$ և $B(x_2; y_2)$ կետերը միմյանցից տարբեր են, ապա (x_1-x_2) և (y_1-y_2) տարբերություններից գոնե մեկը զրո չէ, այսինքն՝ a և b գործակիցներից առնվազն մեկը տարբեր է զրոյից: Այսպիսով՝ ուղղանկյուն կոորդինատների համակարգում **ուղղի հավասարումը առաջին աստիճանի հավասարում է** (այդ պատճառով էլ այդպիսի հավասարումը կոչվում է նաև գծային հավասարում):

Դժվար չէ համոզվել, որ եթե ℓ ուղիղն անցնում է $M_0(x_0; y_0)$ կետով և զուգահեռ է Ox առանցքին, ապա նրա հավասարումն է $y=y_0$ (նկ. 15), իսկ եթե ուղիղն անցնում է $M_0(x_0; y_0)$ կետով և զուգահեռ է Oy առանցքին, ապա նրա հավասարումն է $x=x_0$: Մասնավորապես՝ Ox առանցքի հավասարումն է $y=0$, իսկ Oy առանցքի հավասարումը՝ $x=0$:

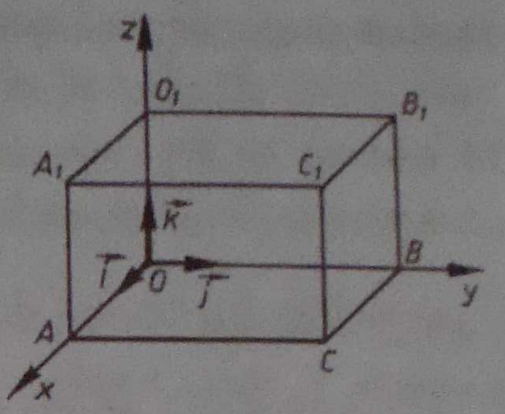


Նկ. 15

Հարցեր և խնդիրներ

1. Տրված են կետեր. $A(3; -1; 0)$, $B(0; 0; -7)$, $C(2; 0; 0)$, $D(-4; 0; 3)$, $E(0; -1; 0)$, $F(1; 2; 3)$, $G(0; 5; -7)$, $H(-\sqrt{5}; \sqrt{3}; 0)$: Որ՞ կետերն են ընկած. **ա)** աբսցիսների առանցքի վրա, **բ)** օրդինատների առանցքի վրա, **գ)** ապլիկատների առանցքի վրա, **դ)** Oxy հարթության վրա, **ե)** Oyz հարթության վրա, **զ)** Oxz հարթության վրա:
2. Գտեք $A(2; -3; 5)$, $B(3; -5; \frac{1}{2})$ և $C(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{5}-\sqrt{3})$ կետերի պրոյեկցիաների կոորդինատները. **ա)** Oxz, Oxy և Oyz կոորդինատային հարթությունների վրա, **բ)** Ox, Oy և Oz կոորդինատների առանցքների վրա:
3. Տրված են $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի չորս գագաթները. $A(0; 0; 0)$, $B(0; 0; 1)$, $D(0; 1; 0)$ և $A_1(1; 0; 0)$: Գտեք խորանարդի մյուս գագաթների կոորդինատները:
4. Գրառեք հետևյալ վեկտորների կոորդինատները. $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{b}=-5\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{d}=\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{m}=\vec{k}-\vec{i}$, $\vec{n}=0{,}7\vec{k}$:
5. Տրված են $\vec{a}\{5; -1; 2\}$, $\vec{b}\{-3; -1; 0\}$, $\vec{c}\{0; -1; 0\}$, $\vec{d}\{0; 0; 0;\}$ վեկտորները: Գրառեք այդ վեկտորների վերածումները ըստ կոորդինատային $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ վեկտորների:

6. Նկար 16-ում պատկերված է ուղղանկյունանիստ, որում $OA=2$, $OB=3$, $OO_1=2$: Գտեք $\vec{OA_1}$, $\vec{OB_1}$, $\vec{OO_1}$, $\vec{OC}$, $\vec{OC_1}$, $\vec{BC_1}$, $\vec{AC_1}$, $\vec{O_1C}$ վեկտորների կոորդինատները $Oxyz$ կոորդինատների համակարգում:

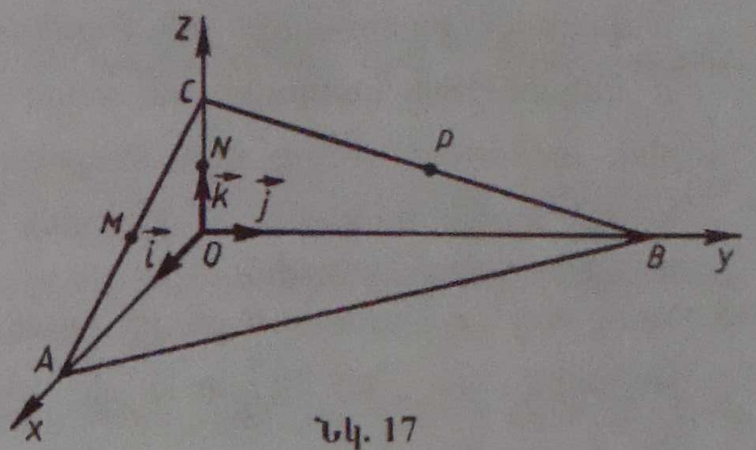


Նկ. 16

7. Ապացուցեք, որ երկու վեկտորների գումարի (տարբերության) յուրաքանչյուր կոորդինատը հավասար է այդ վեկտորների համապատասխան կոորդինատների գումարին (տարբերությանը):

8. Տրված են $\vec{a}\{3;-5;2\}$, $\vec{b}\{0;7;-1\}$, $\vec{c}\left\{\frac{2}{3};0;0\right\}$ և $\vec{d}\{-2{,}7;3{,}1;0{,}5\}$ վեկտորները: Գտեք հետևյալ վեկտորների կոորդինատները. ա) $\vec{a}+\vec{b}$, բ) $\vec{a}+\vec{c}$, գ) $\vec{b}+\vec{c}$, դ) $\vec{d}+\vec{b}$, ե) $\vec{d}+\vec{a}$, զ) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, է) $\vec{b}+\vec{a}+\vec{d}$, ը) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$:

9. Ըստ նկար 17-ի տվյալների գտեք $\vec{AC}$, $\vec{CB}$, $\vec{AB}$, $\vec{MN}$, $\vec{NP}$, $\vec{BM}$, $\vec{OM}$, $\vec{OP}$ վեկտորների կոորդինատները, եթե $OA=4$, $OB=9$, $OC=2$, իսկ M-ը, N-ը և P-ն AC, OC և CB հատվածների միջնակետերն են:



Նկ. 17

10. Տրված են $\vec{a}\{5;-1;1\}$, $\vec{b}\{-2;1;0\}$, $\vec{c}\{0;0{,}2;0\}$ և $\vec{d}\left\{-\frac{1}{3};2\frac{2}{5};-\frac{1}{7}\right\}$ վեկտորները: Գտեք հետևյալ վեկտորների կոորդինատները. ա) $\vec{a}-\vec{b}$, բ) $\vec{b}-\vec{a}$, գ) $\vec{a}-\vec{c}$, դ) $\vec{d}-\vec{a}$, ե) $\vec{c}-\vec{d}$, զ) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, է) $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$, ը) $2\vec{a}$, բ) $-3\vec{b}$, գ) $-6\vec{c}$, դ) $-\frac{1}{3}\vec{d}$, ե) $0{,}2\vec{b}$:

11. Տրված են $\vec{a}\{-1;2;0\}$, $\vec{b}\{0;-5;-2\}$ և $\vec{c}\{2;1;-3\}$ վեկտորները: Գտեք $\vec{p}=3\vec{b}-2\vec{a}+\vec{c}$ և $\vec{q}=3\vec{c}-2\vec{b}+\vec{a}$ վեկտորների կոորդինատները:

12. Տրված են $\vec{a}\{-1;1;1\}$, $\vec{b}\{0;2;-2\}$, $\vec{c}\{-3;2;0\}$ և $\vec{d}\{-2;1;-2\}$ վեկտորները: Գտեք հետևյալ վեկտորների կոորդինատները. ա) $3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$, բ) $-\vec{a}+2\vec{c}-\vec{d}$, գ) $0{,}1\vec{a}+3\vec{b}+0{,}7\vec{c}-5\vec{d}$, դ) $(2\vec{a}+3\vec{b})-(\vec{a}-2\vec{b})+2(\vec{a}-\vec{b})$:

13. Գտեք հետևյալ վեկտորների հակադիր վեկտորների կոորդինատները. $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{a}\{2;0;0\}$, $\vec{b}\{-3;5;-7\}$, $\vec{c}\{-0{,}3;\ 0;\ 1{,}75\}$:

14. Համագի՞ծ են, արդյոք, հետևյալ վեկտորները. **ա)** $\vec{a}\{3;6;8\}$ և $\vec{b}\{6;12;16\}$. **բ)** $\vec{c}\{1;-1;3\}$ և $\vec{d}\{2;3;15\}$, **գ)** $\vec{i}\{1;0;0\}$ և $\vec{j}\{0;1;0\}$, **դ)** $\vec{m}\{0;0;0;\}$ և $\vec{n}\{5;7;-3\}$, **ե)** $\vec{p}\left\{\frac{1}{3};-1;5\right\}$ և $\vec{q}\{-1;-3;-15\}$:

Լ ու ծ ու մ՝ **ա)** $\vec{a}\{3;6;8\}$ վեկտորի կոորդինատները համեմատական են $\vec{b}\{6;12;16\}$ վեկտորի կոորդինատներին. $\frac{3}{6}=\frac{6}{12}=\frac{8}{16}=k$, որտեղ $k=\frac{1}{2}$: Ուրեմն՝ $\vec{a}=k\vec{b}$ և, հետևապես, $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են:

բ) $\vec{c}\{1;-1;3\}$ վեկտորի կոորդինատները համեմատական չեն $\vec{d}\{2;3;15\}$ վեկտորի կոորդինատներին, օրինակ՝ $\frac{1}{2}\neq-\frac{1}{3}$: Ուրեմն՝ $\vec{c}$ և $\vec{d}$ վեկտորները համագիծ չեն: Բանն այն է, որ եթե ենթադրենք, թե $\vec{c}$ և $\vec{d}$ վեկտորները համագիծ են, ապա գոյություն կունենա այնպիսի k թիվ, որ $\vec{c}=k\vec{d}$: Բայց այդ դեպքում $\vec{c}$ վեկտորի կոորդինատները կլինեն համեմատական $\vec{d}$ վեկտորի կոորդինատներին, ինչը հակասում է խնդրի պայմանին:

15. Գտեք m-ի և n-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում հետևյալ վեկտորները համագիծ են. **ա)** $\vec{a}\{15;m;1\}$ և $\vec{b}\{18;12;n\}$, **բ)** $\vec{c}\{m;\ 0{,}4;\ -1\}$ և $\vec{d}\left\{-\frac{1}{2};\ n;\ 5\right\}$:

16. Համահա՞րթ են, արդյոք, հետևյալ վեկտորները. **ա)** $\vec{a}\{-3;-3;0\}$, $\vec{i}$ և $\vec{j}$, **բ)** $\vec{b}\{2;0;-3\}$, $\vec{i}$ և $\vec{j}$, **գ)** $\vec{c}\{1;0;-2\}$, $\vec{i}$ և $\vec{k}$, **դ)** $\vec{d}\{1;-1;2\}$, $\vec{e}\{-2;0;1\}$ և $\vec{f}\{5;-1;0\}$, **ե)** $\vec{m}\{1;0;2\}$, $\vec{n}\{1;1;-1\}$ և $\vec{p}\{-1;2;4\}$, **զ)** $\vec{q}\{0;5;3\}$, $\vec{r}\{3;3;3\}$ և $\vec{s}\{1;1;4\}$:

Լ ու ծ ու մ՝ **դ)** $\vec{d}\{1;-1;2\}$ և $\vec{e}\{-2;0;1\}$ վեկտորները տարագիծ են, քանի որ վեկտորներից մեկի կոորդինատները համեմատական չեն մյուսի կոորդինատներին: Եթե $\vec{f}\{5;-1;0\}$ վեկտորը կարելի է վերածել ըստ $\vec{d}$ և $\vec{e}$ վեկտորների, ապա $\vec{d}$, $\vec{e}$ և $\vec{f}$ վեկտորները համահարթ են: Իսկ եթե $\vec{f}$ վեկտորն ըստ $\vec{d}$ և $\vec{e}$ վեկտորների վերածել հնարավոր չէ, ապա $\vec{d}$, $\vec{e}$ և $\vec{f}$ վեկտորները տարահարթ են (այլապես՝ $\vec{f}$ վեկտորը կարելի է վերածել ըստ $\vec{d}$ և $\vec{e}$ վեկտորների):

Այսպիսով՝ խնդիրը լուծելու համար անհրաժեշտ է բացահայտել հնարավո՞ր է, արդյոք, $\vec{f}$ վեկտորը վերածել ըստ $\vec{d}$ և $\vec{e}$ վեկտորների, այսինքն՝ արդյոք գոյություն ունե՞ն այնպիսի x և y թվեր, որ $\vec{f} = x\vec{d} + y\vec{e}$: Այս հավասարությունը գրելով կոորդինատներով՝ կստանանք $5=x-2y$, $-1=-x$, $0=2x+y$:

Ստացվածը դիտում ենք իբրև հավասարումների համակարգ՝ x և y անհայտներով: Եթե այդ համակարգն ունի լուծում, ապա $\vec{f}$ վեկտորը կարելի է վերածել ըստ $\vec{d}$ և $\vec{e}$ վեկտորների, իսկ եթե համակարգը լուծում չունի, ապա $\vec{f}$ վեկտորը $\vec{d}$ և $\vec{e}$ վեկտորներով վերածել չի կարելի: Տվյալ դեպքում համակարգն ունի լուծում. $x=1$, $y=-2$: Ուրեմն $\vec{f}$ վեկտորը կարելի է վերածել ըստ $\vec{d}$ և $\vec{e}$ վեկտորների, և հետևաբար՝ $\vec{d}$, $\vec{e}$ և $\vec{f}$ վեկտորները համահարթ են:

17. Տրված են $\vec{OA}\{3; 2; 1\}$, $\vec{OB}\{1; -3; 5\}$ և $\vec{OC}\left\{-\frac{1}{3}; 0{,}75; -2\frac{3}{4}\right\}$ վեկտորները: Գրառեք A, B և C կետերի կոորդինատները, եթե O կետը կոորդինատների սկզբնակետն է:

18. Տրված են $A(2; -3; 0)$, $B(7; -12; 18)$ և $C(-8; 0; 5)$ կետերը: Գրառեք $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ և $\vec{OC}$ վեկտորների կոորդինատները, եթե O կետը կոորդինատների սկզբնակետն է:

19. Գտեք $\vec{AB}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե. **ա)** $A(3; -1; 2)$, $B(2; -1; 4)$, **բ)** $A(-2; 6; -2)$, $B(3; -1; 0)$, **գ)** $A\left(1; \frac{5}{6}; \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$:

20. ABC եռանկյան գագաթների կոորդինատներն են՝ $A(1; 6; 2)$, $B(2;3;-1)$, $C(-3; 4; 5)$: $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ և $\vec{CA}$ վեկտորները վերածենք ըստ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ կոորդինատային վեկտորների:

21. Տրված են $A(3; -1; 5)$, $B(2; 3; -4)$, $C(7; 0; -1)$ և $D(8; -4; 8)$ կետերը: Ապացուցեք, որ $\vec{AB}$ և $\vec{DC}$ վեկտորները հավասար են: Արդյոք հավասա՞ր են $\vec{BC}$ և $\vec{AD}$ վեկտորները:

22. A, B և C կետերն ընկա՞ծ են, արդյոք, մի ուղղի վրա, եթե.
ա) $A(3; -7; 8)$, $B(-5; 4; 1)$, $C(27; -40; 29)$, **բ)** $A(-5; 7; 12)$, $B(4; -8; 3)$, $C(13; -23; -6)$, **գ)** $A(-4; 8; -2)$, $B(-3; -1; 7)$, $C(-2; -10; -16)$:

Լուծում: ա) Եթե $\vec{AB}$ և $\vec{AC}$ վեկտորները համագիծ են, ապա A, B և C կետերն ընկած են մի ուղղի վրա, իսկ եթե այդ վեկտորները

տարագիծ են, ապա A, B և C կետերը մի ուղղի վրա չեն ընկած: Գտնենք այդ վեկտորների կոորդինատները. $\vec{AB}\{-8;11;-7\}$, $\vec{AC}\{24;-33;21\}$: Ակնհայտ է, որ $\vec{AC}=-3\vec{AB}$ և, ուրեմն, $\vec{AB}$ և $\vec{AC}$ վեկտորները համագիծ են, իսկ դրանից հետևում է, որ A, B և C կետերն ընկած են մի ուղղի վրա:

23. A, B, C և D կետերը գտնվու՞մ են, արդյոք, մի հարթության մեջ, եթե **ա)** $A(-2;-13;3)$, $B(1;4;1)$, $C(-1;-1;-4)$, $D(0;0;0)$, **բ)** $A(0;1;0)$, $B(3;4;-1)$, $C(-2;-3;0)$, $D(2;0;3)$, **գ)** $A(5;-1;0)$, $B(-2;7;1)$, $C(12;-15;-7)$, $D(1;1;-2)$:

24. Ապացուցեք, որ $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$ գագաթներով ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետն ունի $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\frac{y_1+y_2+y_3}{3};\frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$ կոորդինատները:

25. M կետը AB հատվածի միջնակետն է: Գտեք. **ա)** M կետի կոորդինատները, եթե $A(0;3;-4)$, $B(-2;2;0)$, **բ)** B կետի կոորդինատները, եթե $A(14;-8;5)$, $M(3;-2;-7)$, **գ)** A կետի կոորդինատները, եթե $B(0;0;2)$, $M(-12;4;15)$:

26. AB հատվածի միջնակետն ընկած է Ox առանցքի վրա: Գտեք m-ը և n-ը, եթե. **ա)** $A(-3;m;5)$, $B(2;-2;n)$, **բ)** $A(1;0{,}5;-4)$, $B(1;m;2n)$, **գ)** $A(0;m;n+1)$, $B(1;n;-m+1)$, **դ)** $A(7;2m+n;-n)$, $B(-5;-3;m-3)$:

27. Գտեք $\vec{AB}$ վեկտորի երկարությունը, եթե. **ա)** $A(-1;0;2)$, $B(1;-2;3)$, **բ)** $A(-35;-17;20)$, $B(-34;-5;8)$:

28. Գտեք $\vec{a}\{5;-1;7\}$, $\vec{b}\{2\sqrt{3};-6;1\}$, $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{d}=-2\vec{k}$, $\vec{m}=\vec{i}-2\vec{j}$ վեկտորների երկարությունները:

29. Տրված են $\vec{a}\{3;-2;1\}$, $\vec{b}\{-2;3;1\}$ և $\vec{c}\{-3;2;1\}$ վեկտորները: Գտեք. **ա)** $|\vec{a}+\vec{b}|$, **բ)** $|\vec{a}|+|\vec{b}|$, **գ)** $|\vec{a}|-|\vec{b}|$, **դ)** $|\vec{a}-\vec{b}|$, **ե)** $|3\vec{c}|$, **զ)** $\sqrt{14}|\vec{c}|$, **է)** $|2\vec{a}-3\vec{c}|$:

30. Տրված են $M(-4;7;0)$ և $N(0;-1;2)$ կետերը: Գտեք կոորդինատների սկզբնակետի հեռավորությունը MN հատվածի միջնակետից:

31. Տրված են $A(\frac{3}{2};1;-2)$, $B(2;2;-3)$ և $C(2;0;-1)$ կետերը: Գտեք. **ա)** ABC եռանկյան պարագիծը, **բ)** ABC եռանկյան միջնագծերը:

32. Որոշեք ABC եռանկյան տեսակը, եթե. **ա)** $A(9;3;-5)$, $B(2;10;-5)$, $C(2;3;2)$, **բ)** $A(3;7;-4)$, $B(5;-3;2)$, $C(1;3;-10)$, **գ)** $A(5;-5;-1)$, $B(5;-3;-1)$, $C(4;-3;0)$, **դ)** $A(-5;2;0)$, $B(-4;3;0)$, $C(-5;2;-2)$:

33. Գտեք $A(-3;4;-4)$ կետի հեռավորությունը՝ **ա)** կոորդինատային հարթություններից, **բ)** կոորդինատների առանցքներից:

34. Կոորդինատային հարթությունների յուրաքանչյուրի վրա գտեք այնպիսի կետ, որից $A(-1; 2; -3)$ կետի հեռավորությունը փոքրագույնն է A կետի այդ կոորդինատային հարթության կետերից ունեցած բոլոր հեռավորություններից:

35. Կոորդինատների առանցքներից յուրաքանչյուրի վրա գտեք այնպիսի կետ, որից $B(3; -4; \sqrt{7})$ կետի հեռավորությունը փոքրագույնն է B կետի այդ առանցքի կետերից ունեցած բոլոր հեռավորություններից:

36. Տրված են $A(1; 0; k)$, $B(-1; 2; 3)$ և $C(0; 0; 1)$ կետերը: k թվի ի՞նչ արժեքների դեպքում ABC եռանկյունը հավասարասրուն է:

37. Տրված են $A(4; 4; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(0; 3; 4)$ և $D(1; 4; 4)$ կետերը: Ապացուցեք, որ $ABCD$-ն հավասարասրուն սեղան է:

38. Գտեք այն կետը, որը հավասարահեռ է $A(-2; 3; 5)$ և $B(3; 2; -3)$ կետերից և դասավորված է. **ա)** Ox առանցքի վրա, **բ)** Oy առանցքի վրա, **գ)** Oz առանցքի վրա:

39. Տրված են $A(-1; 2; 3)$, $B(-2; 1; 2)$ և $C(0; -1; 1)$ կետերը: Գտեք այնպիսի կետ, որը հավասարահեռ է այդ կետերից և դասավորված է հետևյալ կոորդինատային հարթության վրա. **ա)** Oxy-ի, **բ)** Oyz-ի **գ)** Ozx-ի:

40. Տրված են $O(0; 0; 0)$, $A(4; 0; 0)$, $B(0; 6; 0)$ և $C(0; 0; -2)$ կետերը: Գտեք. **ա)** AOB եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնի կոորդինատները և շառավիղը, **բ)** $OABC$ քառանիստի գագաթներից հավասարահեռ կետի կոորդինատները:

41. m երկարությամբ CD հատվածն ուղղահայաց է ABC ուղղանկյուն եռանկյան հարթությանը, ընդ որում այդ եռանկյան էջերն են $AC=b$ և $BC=a$: Ներմուծեք հարմար կոորդինատների համակարգ և երկու կետերի հեռավորության բանաձևի օգնությամբ գտեք D կետի հեռավորությունը այդ եռանկյան ներքնաձիգի միջնակետից:

Հարթության վրա գծի հավասարումը

42. $A(3; -4)$, $B(1; 0)$, $C(0; 5)$, $D(0; 0)$ և $E(0; 1)$ կետերից որո՞նք են ընկած այն շրջանագծի վրա, որ տրված է հետևյալ հավասարումով.

ա) $x^2+y^2=25$, **բ)** $(x-1)^2+(y+3)^2=9$, **գ)** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$:

43. Շրջանագիծը տրված է $(x+5)^2+(y-1)^2=16$ հավասարումով: Առանց գծագրից օգտվելու ցույց տվեք, թե $A(-2; 4)$, $B(-5; -3)$, $C(-7; -2)$ և $D(1; 5)$ կետերից որո՞նք են ընկած. **ա)** տրված շրջանագծով եզերված շրջանի ներսում, **բ)** շրջանագծի վրա, **գ)** տրված շրջանագծով եզերված շրջանից դուրս:

44. Տրված են $x^2+y^2=25$ շրջանագիծն ու $A(3; 4)$ և $B(4; -3)$ երկու կետեր: Ապացուցեք, որ AB-ն տրված շրջանագծի լար է:

45. Գտեք $x^2+y^2=25$ հավասարումով տրված շրջանագծի վրա ընկած այն կետերը, որոնց. **ա)** աբսցիսը -4 է, **բ)** օրդինատը 3 է:

46. Գտեք $(x-3)^2+(y-5)^2=25$ հավասարումով տրված շրջանագծի վրա ընկած այն կետերը, որոնց. **ա)** աբսցիսը 3 է, **բ)** օրդինատը 5 է:

47. Գտեք այն շրջանագծերի հավասարումները, որոնց կենտրոնը կոորդինատների սկզբնակետն է, իսկ շառավիղներն են. $r_1=3$, $r_2=\sqrt{2}$, $r_3=\frac{5}{2}$:

48. Գրեք r շառավիղով և A կենտրոնով շրջանագծի հավասարումը, եթե.

ա) $A(0;5)$, $r=3$, **բ)** $A(-1;2)$, $r=2$, **գ)** $A(-3;-7)$, $r=\frac{1}{2}$, **դ)** $A(4;-3)$, $r=10$:

49. Գրեք այն շրջանագծի հավասարումը, որի կենտրոնը կոորդինատների սկզբնակետն է, և որն անցնում է $B(-1;3)$ կետով:

50. Գրեք MN տրամագծով շրջանագծի հավասարումը, եթե.

ա) $M(-3;5)$, $N(7;-3)$, **բ)** $M(2;-1)$, $N(4;3)$:

51. Գրեք $A(1;3)$ կետով անցնող շրջանագծի հավասարումը, եթե հայտնի է, որ շրջանագծի կենտրոնն ընկած է աբսցիսների առանցքի վրա, իսկ շառավիղը 5 է: Քանի՞ այդպիսի շրջանագիծ գոյություն ունի:

52. Գրեք $A(-3;0)$ և $B(0;9)$ կետերով անցնող շրջանագծի հավասարումը, եթե հայտնի է, որ շրջանագծի կենտրոնն ընկած է օրդինատների առանցքի վրա:

53. Գրեք այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է տրված երկու կետերով.

ա) $A(1;-1)$ և $B(-3;2)$, **բ)** $C(2;5)$ և $D(5;2)$, **գ)** $M(0;1)$ և $N(-4;-5)$:

Լուծում: **ա)** AB ուղղի հավասարումն ունի $ax+by+c=0$ տեսքը: Քանի որ A և B կետերն ընկած են AB ուղղի վրա, ապա նրանց կոորդինատները բավարարում են այդ հավասարմանը.

$a\cdot 1+b\cdot(-1)+c=0$, $a\cdot(-3)+b\cdot 2+c=0$,

կամ $a-b+c=0$, $-3a+2b+c=0$:

Այս հավասարումներից a և b գործակիցներն արտահայտենք c-ով. $a=3c$, $b=4c$: Այս արժեքները տեղադրելով ուղղի հավասարման մեջ կստանանք $3cx+4cy+c=0$: Ստացված հավասարումը ցանկացած $c\neq 0$ դեպքում ներկայացնում է AB ուղղի հավասարումը: Կրճատելով c-ն որոնելի հավասարումը կգրենք $3x+4y+1=0$ տեսքով:

54. Տրված են ABC եռանկյան գագաթների կոորդինատները՝ $A(4;6)$, $B(-4;0)$, $C(-1;-4)$: Գրեք CM միջնագիծն ընդգրկող ուղղի հավասարումը:

55. Տրված են $ABCD$ սեղանի գագաթների կոորդինատները. $A(-2;-2)$, $B(-3;1)$, $C(7;7)$, $D(3;1)$: Գրեք այն ուղիղների հավասարումները, որոնք ընդգրկում են. **ա)** AC և BD անկյունագծերը, **բ)** սեղանի միջին գիծը:

56. Գտեք $4x+3y-6=0$ և $2x+y-4=0$ ուղիղների հատման կետի կոորդինատները:

57. Գտեք $M(2;5)$ կետով անցնող և կոորդինատների առանցքներին զուգահեռ ուղիղների հավասարումները:

58. Գտեք այն M կետի օրդինատը, որն ընկած է AB ուղղի վրա, եթե հայտնի է՝ $A(-8; -6)$, $B(-3; -1)$, և M կետի աբսցիսը 5 է:

59. Գրեք այն ուղիղների հավասարումները, որոնք ընդգրկում են 10սմ և 4սմ անկյունագծերով շեղանկյան կողմերը, եթե հայտնի է, որ այդ շեղանկյան անկյունագծերն ընկած են կոորդինատների առանցքների վրա:

60. Պարզեք, թե տրված հավասարումներից որո՞նք են շրջանագծի հավասարում: Գտեք շրջանագծերից յուրաքանչյուրի շառավիղը և կենտրոնի կոորդինատները.

ա) $(x-1)^2+(y+2)^2=25$,
բ) $x^2+(y+7)^2=1$,
գ) $x^2+y^2+8x-4y+40=0$,
դ) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$,
ե) $x^2+y^2-4x-2y+1=0$:

61. Գրեք $A(3; 0)$ և $B(-1; 2)$ կետերով անցնող շրջանագծի հավասարումը, եթե նրա կենտրոնն ընկած է $y=x+2$ ուղղի վրա:

62. Գրեք այն շրջանագծի հավասարումը, որն անցնում է տրված երեք կետերով. **ա)** $A(1; -4)$, $B(4; 5)$, $C(3; -2)$, **բ)** $A(3; -7)$, $B(8; -2)$, $C(6; 2)$:

63. ABC եռանկյան գագաթներն ունեն $A(-7; 5)$, $B(3; -1)$, $C(5; 3)$ կոորդինատները: Կազմեք. **ա)** եռանկյան կողմերի միջնուղղահայաց ուղիղների հավասարումները, **բ)** AB, BC և CA ուղիղների հավասարումները, **գ)** այն ուղիղների հավասարումները, որոնց վրա ընկած են եռանկյան միջին գծերը:

64. Ապացուցեք, որ $3x-1{,}5y+1=0$ և $2x-y-3=0$ հավասարումներով տրված ուղիղները զուգահեռ են:

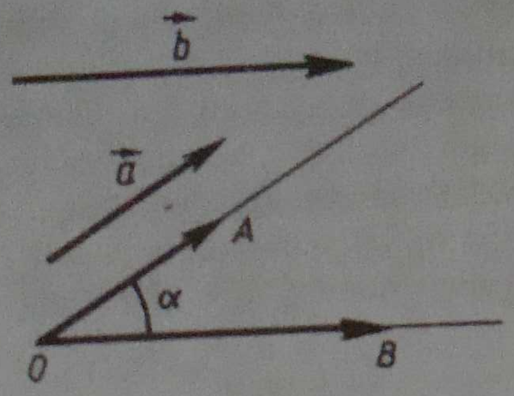
65. Ապացուցեք, որ A, B և C կետերն ընկած են մի ուղղի վրա, եթե.

ա) $A(-2; 0)$, $B(3; 2\frac{1}{2})$, $C(6; 4)$, **բ)** $A(3; 10)$, $B(3; 12)$, $C(3; -6)$, **գ)** $A(1; 2)$, $B(2; 5)$, $C(-10; -31)$:

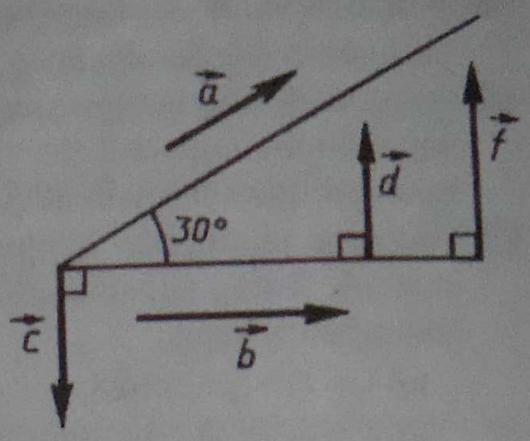
§2 Վեկտորների սկալյար արտադրյալը

6 Վեկտորների կազմած անկյունը

Դիցուք՝ $\vec{a}$-ն և $\vec{b}$-ն երկու կամայական վեկտորներ են: Որևէ O կետից տեղադրենք $\vec{OA}=\vec{a}$ և $\vec{OB}=\vec{b}$ վեկտորները: Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համուղղված չեն, ապա OA և OB ճառագայթները կազմում են AOB անկյուն (նկ. 18): Այդ անկյան աստիճանային չափը նշանակենք α տառով: Այդ դեպքում կասենք, որ **$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը α** է: Իսկ եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համուղղված են, մասնավորապես՝ դրանցից մեկը կամ երկուսն էլ զրոյական են, ապա կհամարենք, որ դրանց կազմած անկյունը 0^0 է: Եթե վեկտորների կազմած անկյունը 90^0 է, ապա վեկտորները կոչվում են **ուղղահայաց**: $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած



Նկ.18



Նկ.19

անկյունը նշանակվում է այսպես. $\angle(\vec{a},\vec{b})$ (երբեմն նշանակվում է նաև այլ կերպ, օրինակ՝ $\hat{\vec{a}\,\vec{b}}$ տեսքով):

Նկար 19-ում պատկերված են մի քանի վեկտորներ: Դրանք կազմում են հետևյալ անկյունները. $\angle(\vec{a},\vec{b})=30^0$, $\angle(\vec{a},\vec{c})=120^0$, $\angle(\vec{a},\vec{d})=60^0$, $\angle(\vec{b},\vec{c})=90^0$, $\angle(\vec{d},\vec{f})=0^0$, $\angle(\vec{d},\vec{c})=180^0$: Այդ նկարում $\vec{b}\perp\vec{c}$, $\vec{b}\perp\vec{d}$, $\vec{b}\perp\vec{f}$:

7. Վեկտորների սկալյար արտադրյալը

Երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալ կոչվում է նրանց երկարությունների և նրանցով կազմված անկյան կոսինուսի արտադրյալը:

$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը նշանակվում է $\vec{a}\cdot\vec{b}$ կամ $\vec{a}\vec{b}$: Այսպիսով, ըստ սահմանման՝ $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$:

Ինչպես և հարթաչափության մեջ, ճշմարիտ են հետևյալ պնդումները:

Երկու ոչ զրոյական վեկտորների սկալյար արտադրյալը զրո է այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ վեկտորներն ուղղահայաց են,

վեկտորի սկալյար քառակուսին (այսինքն՝ վեկտորի ինքն իր հետ սկալյար արտադրյալը) հավասար է նրա երկարության քառակուսուն:

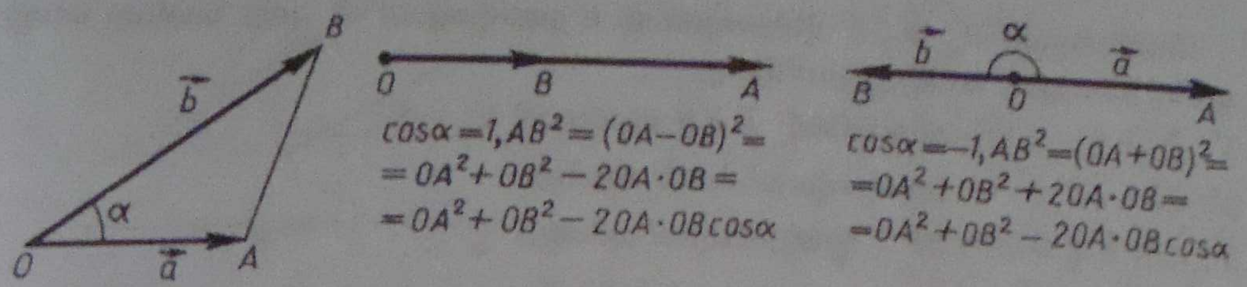
Այս պնդումներն ապացուցեք ինքնուրույն:

Երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը կարելի է հաշվել՝ իմանալով այդ վեկտորների կոորդինատները. $\vec{a}\{x_1,y_1,z_1\}$ և $\vec{b}\{x_2,y_2,z_2\}$ **վեկտորների սկալյար արտադրյալն արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝**

$$\vec{a}\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \qquad (1)$$

Ապացուցենք այս պնդումը: Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներից թեկուզ մեկը զրոյական է, ապա (1) բանաձևի ստույգ լինելն ակնհայտ է, քանի որ զրոյական վեկտորի բոլոր կոորդինատները հավասար են զրոյի: Քննության առնենք այն դեպքը, երբ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները զրոյական չեն: Կամայական O կետից տեղադրենք $\vec{OA}=\vec{a}$ և $\vec{OB}=\vec{b}$ վեկտորները: Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները տարագիծ են (նկ. 20,ա), ապա ըստ կոսինուսների թեորեմի՝

$$AB^2=OA^2+OB^2-2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos\alpha. \qquad (2)$$



ա) բ) գ)

Նկ. 20

Ի դեպ՝ (2) հավասարությունը տեղի ունի նաև այն դեպքում, երբ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են (տե՛ս նկ. 20,բ,գ, $\cos\alpha = 1$, $\cos\alpha = -1$ դեպքերը):

Քանի որ $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, ապա (2) հավասարությունը կարելի է գրել $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}^2| + |\vec{b}^2| - 2\vec{a}\vec{b}$ տեսքով, որից ստացվում է

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2\right): \qquad (3)$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{b} - \vec{a}$ վեկտորներն ունեն, համապատասխանաբար, $\{x_1; y_1; z_1\}$, $\{x_2; y_2; z_2\}$ և $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ կոորդինատները: Ուրեմն՝ $|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$, $|\vec{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$, $|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$: Այս արտահայտությունները տեղադրելով (3) հավասարության մեջ և կատարելով ձևափոխություններ, ստացվում է (1) բանաձևը:

$\vec{a}\{x_1, y_1, z_1\}$ և $\vec{b}\{x_2, y_2, z_2\}$ ոչ զրոյական վեկտորների կազմած α անկյան կոսինուսը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}: \qquad (4)$$

Իսկապես, քանի որ $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$, ապա $\cos\alpha = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$: Այս բանաձևերում տեղադրելով $\vec{a}\vec{b}$, $|\vec{a}|$ և $|\vec{b}|$ արտահայտությունները՝ ներկայացված $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կոորդինատներով, կստանանք (4) բանաձևը:

Ծանակերպենք վեկտորների սկալյար արտադրյալի հիմնական հատկությունները:

Ցանկացած $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորների և ցանկացած k թվի համար տեղի ունեն հետևյալ առնչությունները.

1°. $\vec{a}^2 \geq 0$, **ընդ որում՝** $\vec{a} \neq 0$ **դեպքում** $\vec{a}^2 > 0$,

2°. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ **(տեղափոխական օրենք),**

3°. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ **(բաշխական օրենք),**

4°. $k(\vec{a}\vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b}$ **(զուգորդական օրենք):**

1° հատկությունն անմիջականորեն հետևում է $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ բանաձևից, իսկ 2° հատկությունը՝ սկալյար արտադրյալի սահմանումից: Ապացուցենք 3° և 4° հատկությունները:

Ներմուծենք ուղղանկյուն կոորդինատների համակարգ և $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորների կոորդինատները նշանակենք այսպես՝ $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$, $\vec{c}\{x_3; y_3; z_3\}$: Օգտագործելով (1) բանաձևը՝ ստանում ենք.

$$(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = (x_1 + x_2)x_3 + (y_1 + y_2)y_3 + (z_1 + z_2)z_3 =$$

$$(x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3) + (x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}:$$

Այսպիսով՝ 3° հատկությունն ապացուցված է:

Այժմ անդրադառնանք 4° հատկությանը: Նկատենք, որ $k\vec{a}$ վեկտորն ունի $\{kx_1; ky_1; kz_1\}$ կոորդինատները, ուրեմն՝

$$(k\vec{a})\vec{b} = (kx_1)x_2 + (ky_1)y_2 + (kz_1)z_2 = k(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) = k(\vec{a}\vec{b}):$$

Դժվար չէ ապացուցել, որ բաշխական օրենքը տեղի ունի ևս ցանկացած թվով գումարելիների համար: Օրինակ՝

$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\vec{d} = \vec{a}\vec{d} + \vec{b}\vec{d} + \vec{c}\vec{d}$ (տե՛ս խնդիր 83-ը):

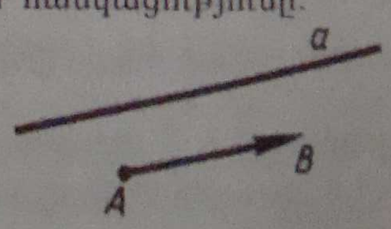
Պարզաբանում

Ուշադրության է արժանի հետևյալ հանգամանքը. (1) հավասարության ձախ մասում գրված են բազմապատկվող վեկտորներ, մինչդեռ աջ մասում՝ բազմապատկման արդյունքը թիվ է: Այդ առումով նկատենք, որ վեկտորների սկալյար բազմապատկման կանոնները համանման են թվերի բազմապատկման կանոններին, և դրա հաստատումն են վերոհիշյալ 1°–4° հատկությունները:

8 Ուղիղների և հարթությունների կազմած անկյունների հաշվումը

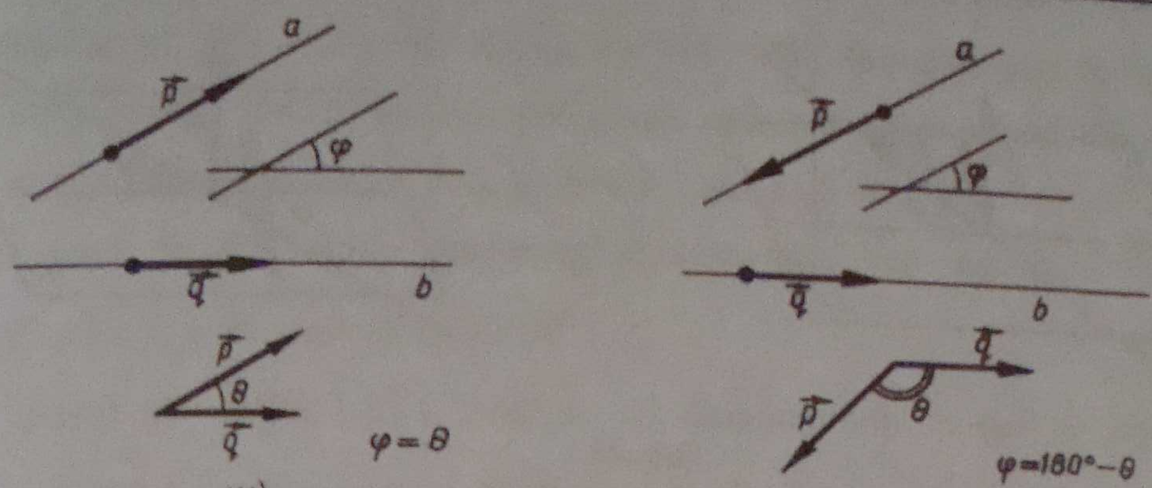
Երկու ուղիղների, ինչպես նաև ուղղի և հարթության կազմած անկյունը հաշվելու համար շատ դեպքերում հարմար է օգտագործել սկալյար արտադրյալը: Նախքան անկյուններ հաշվելուն վերաբերող խնդիրների դիտարկումը՝ ներմուծենք **ուղղի ուղղորդ վեկտորի** հասկացությունը:

Ոչ զրոյական վեկտորը կոչվում է a ուղղի ուղղորդ վեկտոր, եթե այն ընկած է կա՛մ a ուղղի, կամ էլ նրան զուգահեռ ուղղի վրա:



Նկ. 21

Նկար 21-ում $\vec{AB}$ վեկտորը a ուղղի ուղղորդ վեկտորն է:



ա) բ)

Նկ. 22

Խնդիր 1

Գտնել երկու (հատվող կամ խաչվող) ուղիղների կազմած անկյունը, եթե հայտնի են այդ ուղիղների ուղղորդ վեկտորների կոորդինատները:

Լուծում: Դիցուք՝ $\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$-ը և $\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$-ը a և b ուղիղների ուղղորդ վեկտորներն են: Այդ ուղիղների կազմած, որոնելի անկյունը նշանակենք φ տառով: Խնդիրը լուծելու համար բավական է գտնել $\cos\varphi$-ն, քանի որ $\cos\varphi$-ի արժեքով հնարավոր է գտնել φ անկյունը:

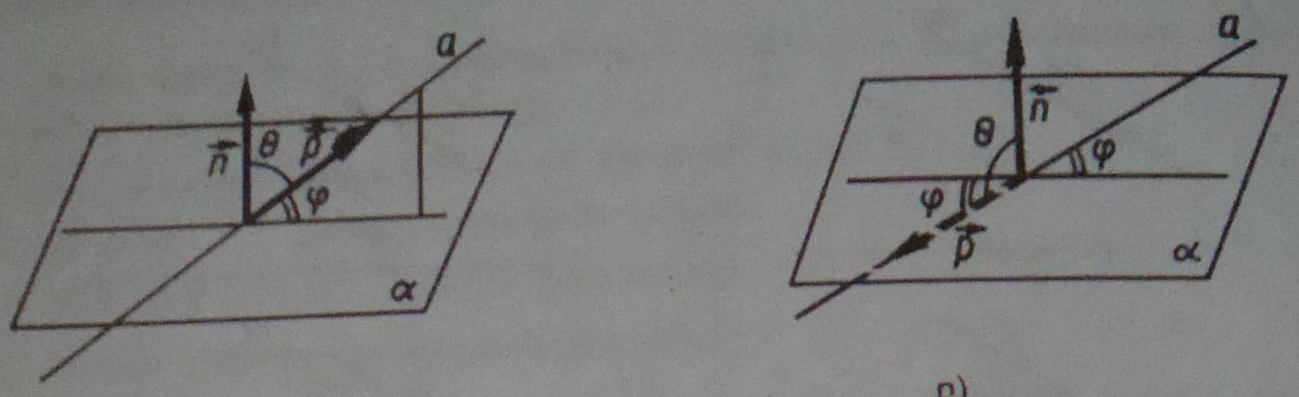
Կատարենք նշանակում. $\theta = \angle(\vec{p},\vec{q})$: Այդ դեպքում կա՛մ $\varphi = \theta$՝ եթե $\theta \le 90^0$ (նկ. 22,ա), կա՛մ $\varphi = 180^0 - \theta$՝ եթե $\theta > 90^0$ (նկ. 22,բ): Ուրեմն՝ կա՛մ $\cos\varphi = \cos\theta$, կա՛մ $\cos\varphi = -\cos\theta$: Բոլոր դեպքերում էլ $|\cos\varphi| = |\cos\theta|$, բայց քանի որ $\varphi \le 90^0$, ապա $\cos\varphi \ge 0$ և, հետևապես, $\cos\varphi = |\cos\theta|$: Օգտագործելով կետ 7-ի (4) բանաձևը՝ ստացվում է

$$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}: \qquad (5)$$

Խնդիր 2

Գտնել ուղղի և հարթության կազմած անկյունը, եթե հայտնի են ուղղի ուղղորդ վեկտորի կոորդինատները և հարթությանն ուղղահայաց՝ ոչ զրոյական վեկտորի կոորդինատները:

Լուծում: Դիցուք՝ $\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$-ը a ուղղի ուղղորդ վեկտորն է, իսկ $\vec{n}\{x_2; y_2; z_2\}$-ը՝ ոչ զրոյական վեկտոր՝ ուղղահայաց α հարթությանը: Դա նշանակում է, որ այն ուղիղը, որի վրա ընկած է $\vec{n}$ վեկտորը, ուղղահայաց է α հարթությանը: Նշանակենք φ տառով որոնելի անկյունը, այսինքն՝ a ուղղի և α հարթության կազմած անկյունը, իսկ θ տառով՝ $\angle(\vec{p},\vec{n})$-ը:



ա) բ)

Նկ. 23

Դժվար չէ ապացուցել (օգտվելով նկար 23-ից ապացուցեք ինքնուրույն), որ $\sin\varphi = |\cos\theta|$: Ուրեմն $\sin\varphi$-ի համար ստացվում է այն արտահայտությունը, ինչը (5) հավասարության աջ մասում է:

Իմանալով $\sin\varphi$-ն և նկատի ունենալով, որ $\varphi \le 90^0$, կարելի է գտնել φ-ն:

Խնդիրներ

66. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդը: Գտեք հետևյալ վեկտորների կազմած անկյունը. **ա)** $\vec{B_1B}$ և $\vec{B_1C}$, **բ)** $\vec{DA}$ և $\vec{B_1D_1}$, **գ)** $\vec{A_1C_1}$ և $\vec{A_1B}$, **դ)** $\vec{BC}$ և $\vec{AC}$, **ե)** $\vec{BB_1}$ և $\vec{AC}$, **զ)** $\vec{B_1C}$ և $\vec{AD_1}$, **է)** $\vec{A_1D_1}$ և $\vec{BC}$, **ը)** $\vec{AA_1}$ և $\vec{C_1C}$:

67. $\vec{AB}$ և $\vec{CD}$ վեկտորների կազմած անկյունը φ է: Գտեք $\angle\left(\vec{BA},\vec{DC}\right)$, $\angle\left(\vec{BA},\vec{CD}\right)$, $\angle\left(\vec{AB},\vec{DC}\right)$ անկյունները:

68. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի կողը a է, O_1 կետը $A_1B_1C_1D_1$ նիստի կենտրոնն է: Հաշվեք հետևյալ վեկտորների սկալյար արտադրյալը.

ա) $\vec{AD}$ և $\vec{B_1C_1}$, **բ)** $\vec{AC}$ և $\vec{C_1A_1}$, **գ)** $\vec{D_1B}$ և $\vec{AC}$, **դ)** $\vec{BA_1}$ և $\vec{BC_1}$, **ե)** $\vec{A_1O_1}$ և $\vec{A_1C_1}$, **զ)** $\vec{D_1O_1}$ և $\vec{B_1O_1}$, **է)** $\vec{BO_1}$ և $\vec{C_1B}$:

69. Տրված են $\vec{a}\{1;-1;2\}$, $\vec{b}\{-1;1;1\}$, և $\vec{c}\{5;6;2\}$ վեկտորները: Հաշվեք $\vec{a}\vec{c}$-ն, $\vec{a}\vec{b}$-ն, $\vec{b}\vec{c}$-ն, $\vec{a}\vec{a}$-ն, $\sqrt{\vec{b}\vec{b}}$-ն:

70. Տրված են $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$ և $\vec{b} = \vec{j} - 5\vec{k}$ վեկտորները: Հաշվեք **ա)** $\vec{a}\vec{b}$-ն, **բ)** $\vec{a}\vec{i}$-ն, **գ)** $\vec{b}\vec{j}$-ն, **դ)** $(\vec{a}+\vec{b})\vec{k}$-ն, **ե)** $\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\left(\vec{k}+\vec{i}-2\vec{j}\right)$-ն:

71. Տրված են $\vec{a}\{3;-1;1\}$, $\vec{b}\{-5;1;0\}$, և $\vec{c}\{-1;-2;1\}$ վեկտորները: Պարզեք, թե ինչպիսի (սո՞ւր, ուղի՞ղ, թե՞ բութ) անկյուն են կազմում հետևյալ վեկտորները. **ա)** $\vec{a}$ -ն և $\vec{b}$ -ն, **բ)** $\vec{b}$ -ն և $\vec{c}$ -ն, **գ)** $\vec{a}$ -ն և $\vec{c}$ -ն:

72. Տրված է $\vec{a}\{3;-5;0\}$ վեկտորը: Ապացուցեք, որ **ա)** $\angle(\vec{a},\vec{i})<90^0$, **բ)** $\angle(\vec{a},\vec{j})>90^0$, **գ)** $\angle(\vec{a},\vec{k})=90^0$:

73. Տրված են $\vec{a}\{-1;2;3\}$ և $\vec{b}\{5;x;-1\}$ վեկտորները: x-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում է բավարարվում հետևյալ պայմանը. **ա)** $\vec{a}\vec{b}=3$, **բ)** $\vec{a}\vec{b}=-1$, **գ)** $\vec{a}\perp\vec{b}$:

74. Տրված են $\vec{a}=m\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ և $\vec{b}=4\vec{i}+m\vec{j}-7\vec{k}$ վեկտորները: m-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներն ուղղահայաց են:

75. Տրված են $A(0;1;2)$, $B(\sqrt{2};1;2)$, $C(\sqrt{2};2;1)$ և $D(0;2;1)$ կետերը: Ապացուցեք, որ $ABCD$ -ն քառակուսի է:

76. Հաշվեք հետևյալ վեկտորների կազմած անկյունը. **ա)** $\vec{a}\{2;-2;0\}$ և $\vec{b}\{3;0;-3\}$, **բ)** $\vec{a}\{\sqrt{2};\sqrt{2};2\}$ և $\vec{b}\{-3;-3;0\}$, **գ)** $\vec{a}\{0;5;0\}$ և $\vec{b}\{0;-\sqrt{3};1\}$, **դ)** $\vec{a}\{-2,5;2,5;0\}$ և $\vec{b}\{-5;5;5\sqrt{2}\}$, **ե)** $\vec{a}\{-\sqrt{2};-\sqrt{2};-2\}$ և $\vec{b}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};-1\right\}$:

77. Հաշվեք $\vec{a}\{2;1;2\}$ վեկտորի և կոորդինատային վեկտորների կազմած անկյունները:

78. Տրված են $A(1;3;0)$, $B(2;3;-1)$ և $C(1;2;-1)$ կետերը: Հաշվեք $\vec{CA}$ և $\vec{CB}$ վեկտորների կազմած անկյունը:

79. Գտեք այն եռանկյան անկյունները, պարագիծը և մակերեսը, որի գագաթներն են $A(1;-1;3)$, $B(3;-1;1)$ և $C(-1;1;3)$ կետերը:

80. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդը: Գտեք հետևյալ վեկտորների կազմած անկյան կոսինուսը. **ա)** $\vec{AA_1}$ և $\vec{AC_1}$, **բ)** $\vec{BD_1}$ և $\vec{DB_1}$, **գ)** $\vec{DB}$ և $\vec{AC_1}$:

81. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստը, որում $AB=1$, $BC=CC_1=2$: Գտեք $\vec{DB_1}$ և $\vec{BC_1}$ վեկտորների կազմած անկյունը:

82. Հայտնի է, որ $\angle(\vec{a},\vec{c})=\angle(\vec{b},\vec{c})=60^0$, $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$: Հաշվեք $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}$ -ն:

83. Ապացուցեք, որ $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\vec{d}=\vec{a}\vec{d}+\vec{b}\vec{d}+\vec{c}\vec{d}$:

Լուծում: $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ երեք վեկտորների գումարը գրենք $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ տեսքով: Օգտվելով վեկտորների սկալյար արտադրյալի բաշխական օրենքից՝ ստանում ենք.

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\vec{d}=((\vec{a}+\vec{b})+\vec{c})\vec{d}=(\vec{a}+\vec{b})\vec{d}+\vec{c}\vec{d}=$$

$$=(\vec{a}\vec{d}+\vec{b}\vec{d})+\vec{c}\vec{d}=\vec{a}\vec{d}+\vec{b}\vec{d}+\vec{c}\vec{d}:$$

84. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներից յուրաքանչյուրն ուղղահայաց է $\vec{c}$ վեկտորին, $\angle(\vec{a},\vec{b})=120^0$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$: Հաշվեք. ա) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})(2\vec{b})$ և $(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})(\vec{a}-\vec{c})$ սկալյար արտադրյալները, բ) $|\vec{a}-\vec{b}|$-ն և $|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|$-ն:

85. Ապացուցեք, որ կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգում ոչ զրոյական $\vec{a}$ վեկտորի կոորդինատներն են $\{|\vec{a}|\cos\varphi_1;|\vec{a}|\cos\varphi_2;|\vec{a}|\cos\varphi_3\}$, որտեղ $\varphi_1=\angle(\vec{a},\vec{i})$, $\varphi_2=\angle(\vec{a},\vec{j})$, $\varphi_3=\angle(\vec{a},\vec{k})$:

Լուծում: Եթե $\vec{a}$ վեկտորն ունի $\{x;y;z\}$ կոորդինատներ, ապա $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$:

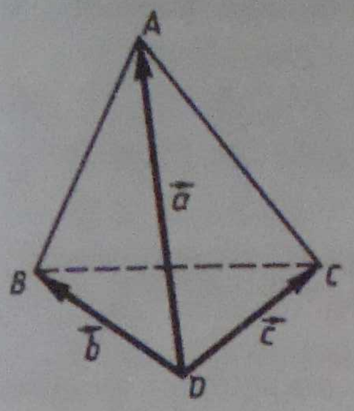
Տվյալ հավասարության երկու մասերը սկալյար բազմապատկենք $\vec{i}$ վեկտորով և օգտվենք սկալյար արտադրյալի հատկություններից, կստանանք.

$$\vec{a}\vec{i}=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\vec{i}=x(\vec{i}\,\vec{i})+y(\vec{j}\vec{i})+z(\vec{k}\vec{i}):$$

Քանի որ $\vec{i}\,\vec{i}=1$, $\vec{j}\vec{i}=0$, $\vec{k}\vec{i}=0$, ուրեմն $\vec{a}\vec{i}=x$: Մյուս կողմից, ըստ սկալյար արտադրյալի սահմանման՝ $\vec{a}\vec{i}=|\vec{a}||\vec{i}|\cos\varphi_1=|\vec{a}|\cos\varphi_1$: Այսպիսով՝ $x=|\vec{a}|\cos\varphi_1$: Համանման ձևով ստացվում են նաև $y=|\vec{a}|\cos\varphi_2$ և $z=|\vec{a}|\cos\varphi_3$:

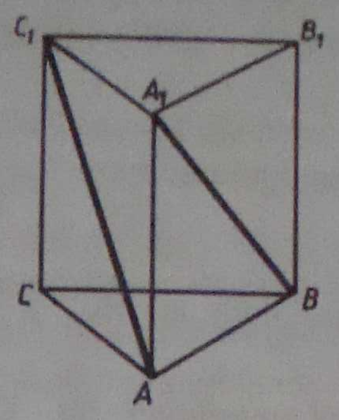
86. $ABCD$ քառանիստի բոլոր կողերը միմյանց հավասար են: M և N կետերը AD և BC կողերի միջնակետերն են: Ապացուցեք, որ $\vec{MN}\cdot\vec{AD}=\vec{MN}\cdot\vec{BC}=0$:

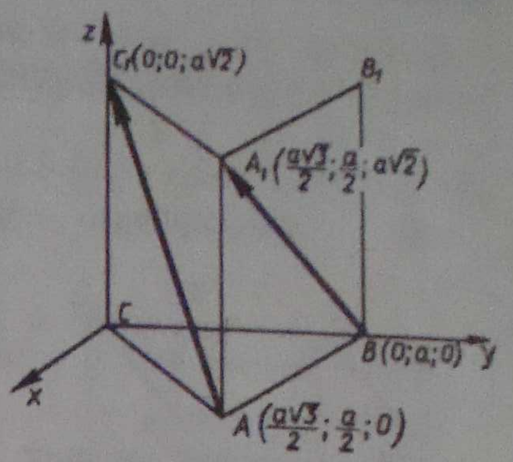
87. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստում $AA_1=AB=AD=1$, $\angle DAB=60^0$, $\angle A_1AD=\angle A_1AB=90^0$: Հաշվեք. ա) $\vec{BA}\cdot\vec{D_1C_1}$-ը, բ) $\vec{BC_1}\cdot\vec{D_1B}$-ն, գ) $\vec{AC_1}\cdot\vec{AC_1}$-ը, դ) $\left|\vec{DB_1}\right|$-ը, ե) $\left|\vec{A_1C}\right|$-ն, զ) $\cos\angle(\vec{DA_1},\vec{D_1B})$-ն, է) $\cos\angle(\vec{AC_1},\vec{DB_1})$-ը:



ա)

Նկ. 24





բ)

Նկ. 25

88. $ABCD$ քառանիստում հանդիպակաց կողերը՝ AD-ն և BC-ն, ինչպես նաև BD–ն և AC–ն ուղղահայաց են: Ապացուցեք, որ CD և AB հանդիպակաց կողերը նույնպես ուղղահայաց են:

Լ ու ծ ու մ : Ներմուծենք $\vec{a}=\vec{DA}$, $\vec{b}=\vec{DB}$, $\vec{c}=\vec{DC}$ վեկտորները (նկ. 24): Այդ դեպքում $\vec{AB}=\vec{b}-\vec{a}$, $\vec{AC}=\vec{c}-\vec{a}$, $\vec{BC}=\vec{c}-\vec{b}$: Ըստ պայմանի $AD\perp BC$ և $BD\perp AC$, ուրեմն՝ $\vec{a}\perp(\vec{c}-\vec{b})$ և $\vec{b}\perp(\vec{c}-\vec{a})$: Հետևաբար՝ $\vec{a}(\vec{c}-\vec{b})=0$ և $\vec{b}(\vec{c}-\vec{a})=0$: Դրանից ստացվում է, որ $\vec{a}\vec{c}=\vec{a}\vec{b}$ և $\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{a}$: Այս երկու հավասարություններից հետևում է, որ $\vec{a}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}$, կամ՝ $(\vec{b}-\vec{a})\vec{c}=0$: Բայց $\vec{b}-\vec{a}=\vec{AB}$ և $\vec{c}=\vec{DC}$: Ուրեմն՝ $\vec{AB}\cdot\vec{DC}=0$ և, հետևապես, $AB\perp CD$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

89. Հաշվեք AB և CD ուղիղների կազմած անկյունը, եթե. **ա)** $A(3;-2;4)$, $B(4;-1;2)$, $C(6;-3;2)$, $D(7;-3;1)$, **բ)** $A(5;-8;-1)$, $B(6;-8;-2)$, $C(7;-5;-11)$, $D(7;-7;-9)$, **գ)** $A(1;0;2)$, $B(2;1;0)$, $C(0;-2;-4)$, $D(-2;-4;0)$, **դ)** $A(-6;-15;7)$, $B(-7;-15;8)$, $C(14;-10;9)$, $D(14;-10;7)$:

90. Տրված է $ABCA_1B_1C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզման, որում $AA_1=\sqrt{2}AB$ (նկ. 25,ա): Գտեք AC_1 և A_1B ուղիղների կազմած անկյունը:

Լ ու ծ ու մ : Դիցուք՝ $AB=a$, այդ դեպքում $AA_1=\sqrt{2}a$: Ներմուծենք կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգ՝ ինչպես ցույց է տրված 25.բ նկարում: A, B, A_1, C_1 գագաթներն այդ համակարգում ունեն հետևյալ կոորդինատները (պարզաբանեք՝ ինչու). $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right)$, $B(0;a;0)$,

$A_1\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};a\sqrt{2}\right)$, $C_1(0;0;a\sqrt{2})$: Դրանց միջոցով գտնում ենք $\vec{AC_1}$ և $\vec{BA_1}$ վեկտորների կոորդինատները. $\vec{AC_1}\left\{-\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};a\sqrt{2}\right\}$, $\vec{BA_1}\left\{\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};a\sqrt{2}\right\}$: Նկատենք, որ $\vec{AC_1}$ և $\vec{BA_1}$ վեկտորները AC_1 և A_1B ուղիղների ուղղորդ վեկտորներն են: Այդ ուղիղների կազմած որոնելի φ անկյունը կարելի է գտնել ըստ (5) բանաձևի.

$$\cos\varphi=\frac{\left|-\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2+2a^2\right|}{\sqrt{\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2+2a^2}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2+2a^2}}=\frac{1}{2},$$

որից էլ հետևում է, որ $\varphi=60^0$:

91. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդում M կետն ընկած է AA_1 կողի վրա, ընդ որում $AM:MA_1=3:1$, իսկ N կետը BC կողի միջնակետն է: Գտեք հետևյալ ուղիղների կազմած անկյունների կոսինուսները. ա) MN և DD_1, բ) MN և BD, գ) MN և B_1D, դ) MN և A_1C:

92. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստում $AB=BC=\frac{1}{2}AA_1$: Գտեք հետևյալ ուղիղների կազմած անկյունը. ա) BD և CD_1, բ) AC և AC_1:

93. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստում $AB=1$, $BC=2$, $BB_1=3$: Հաշվեք հետևյալ ուղիղների կազմած անկյան կոսինուսը. ա) AC և D_1B, բ) AB_1 և BC_1, գ) A_1D և AC_1:

94. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդում $ABCD$ նիստի անկյունագծերը հատվում են N կետում, իսկ M կետն ընկած է A_1D_1 կողի վրա, ընդ որում $A_1M:MD_1=1:4$: Հաշվեք այն անկյան սինուսը, որ կազմում են MN ուղիղը և հետևյալ նիստի հարթությունը. ա) $ABCD$, բ) DD_1C_1C, գ) AA_1D_1D:

95. $ABCD$ քառանիստում $\angle ABD=\angle ABC=\angle DBC=90^0$, $AB=BD=2$, $BC=1$: Հաշվեք այն անկյան սինուսը, որ կազմում են AD և BC կողերի միջնակետերով անցնող ուղիղը և հետևյալ նիստի հարթությունը. ա) ABD, բ) DBC, գ) ABC:

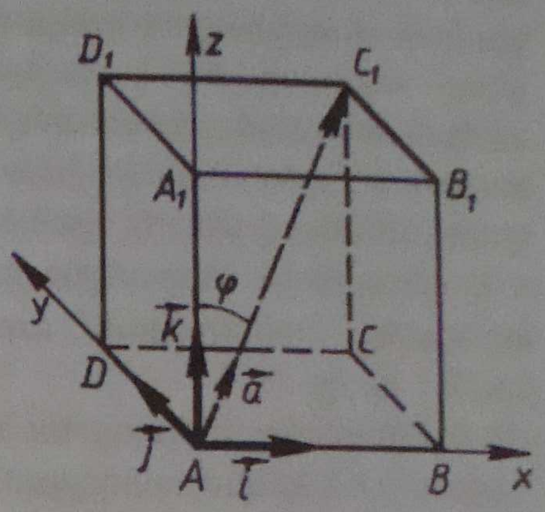
96. Ապացուցեք, որ երկու խաչվող ուղիղները, որոնցից մեկն ընդգրկում է խորանարդի անկյունագիծը, իսկ մյուսը՝ խորանարդի նիստի անկյունագիծը, կազմում են 90^0 անկյուն:

97. Տրված է $MNPQM_1N_1P_1Q_1$ խորանարդը: Ապացուցեք, որ PM_1 ուղիղն ուղղահայաց է MN_1Q_1 և QNP_1 հարթություններին:

98. OA, OB և OC ճառագայթները կազմում են երեք AOB, AOC և BOC ուղիղ անկյուններ: Գտեք COA և AOB անկյունների կիսորդների կազմած անկյունը:

99. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստում $\angle BAC_1 = \angle DAC_1 = 60^0$: Գտեք $\varphi = \angle A_1AC_1$ անկյունը:

Լուծում: Ներմուծենք $Oxyz$ ուղղանկյուն կոորդինատների համակարգ՝ ինչպես ցույց է տրված նկար 26-ում, և դիտարկենք $\vec{a}$ միավոր վեկտորը, որը համուղղված է $\vec{AC_1}$ վեկտորին: $\vec{a}$ վեկտորն ունի $\{\cos 60^0; \cos 60^0, \cos\varphi\}$ կոորդինատները, կամ, որ նույնն է՝ $\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \cos\varphi\right\}$: Քանի որ $|\vec{a}| = 1$, ապա



Նկ. 26

կստանանք $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cos^2\varphi = 1$ հավասարությունը: Դրանից՝ $\cos^2\varphi = \frac{1}{2}$ և, ուրեմն, $\cos\varphi = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$: Քանի որ φ անկյունը սուր է, ապա $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ուրեմն՝ $\varphi = 45^0$:

100. $DABC$ քառանիստում $DA = 5$սմ, $AB = 4$սմ, $AC = 3$սմ, $\angle BAC = 90^0$, $\angle DAB = 60^0$, $\angle DAC = 45^0$: Գտեք A գագաթի հեռավորությունը DBC եռանկյան միջնագծերի հատման կետից:

101. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստում AC_1 անկյունագիծը AB և AD կողերից յուրաքանչյուրի հետ կազմում է 60^0 անկյուն: Գտեք $\angle CAC_1$-ը:

102. K կետի պրոյեկցիան $ABCD$ քառակուսու հարթության վրա համընկնում է այդ քառակուսու կենտրոնին: Ապացուցեք, որ AK և BD ուղիղների կազմած անկյունը 90^0 է:

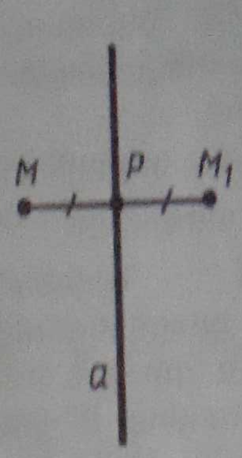
§3 Շարժումներ

Ա. Հարթության շարժումը

9 Հարթության արտապատկերում իր վրա

Պատկերացնենք, որ հարթության յուրաքանչյուր կետի համադրվում է այդ նույն հարթության որևէ կետ, ընդ որում՝ հարթության ամեն մի կետը համադրված է մի որևէ կետի: Այդ դեպքում ասում են, որ տրված է **հարթության արտապատկերում իր վրա:**

Հարթաչափության դասընթացում մենք, փաստորեն, հարթության վրա արտապատկերմանն արդեն հանդիպել ենք: Հիշենք, որ առանցքային համաչափությունը այդպիսի արտապատկերում է (նկ. 27): Իսկապես հարթության յուրաքանչյուր M կետը համադրվում է հարթության վրա տրված a առանցքի նկատմամբ իրեն համաչափ M_1 կետին, ընդ որում՝ ամեն մի M_1 կետը համադրված է մի որևէ M կետի հետ:



Նկ. 27

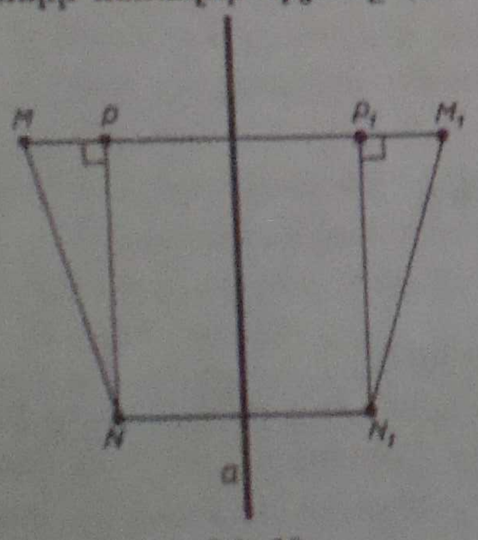
Նկ. 28

Այսպիսով՝ առանցքային համաչափությունը հարթության արտապատկերումն է իր վրա:

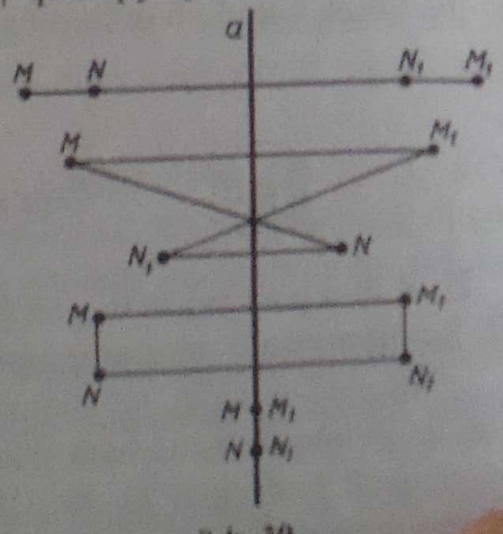
Այժմ դիտարկենք հարթության կենտրոնային համաչափությունը: Դիցուք O-ն համաչափության կենտրոնն է: Հարթության յուրաքանչյուր M կետի համադրվում է O կենտրոնի նկատմամբ իրեն համաչափ M_1 կետը (նկ. 28): Դժվար չէ համոզվել, որ հարթության կենտրոնային համաչափությունը նույնպես հարթության արտապատկերումն է իր վրա:

10 Շարժման հասկացությունը

Առանցքային համաչափությունն օժտված է մի կարևոր հատկությամբ. **դա հարթության այնպիսի արտապատկերումն է իր վրա, որ պահում է կետերի միջև հեռավորությունը:** Պարզաբանենք դրա իմաստը: Դիցուք M-ը և N-ը հարթության ինչ-որ կետեր են, իսկ M_1-ը և N_1-ը a առանցքի նկատմամբ դրանց համաչափ կետերն են (նկ. 29): N և N_1 կետերից տանենք MM_1 ուղղին ուղղահայացներ NP-ն և N_1P_1-ը: MNP և $M_1N_1P_1$ ուղղանկյուն եռանկյունները հավասար են՝ ըստ երկու էջերի. $MP=M_1P_1$ և $NP=N_1P_1$ (պարզաբանեք, թե ինչու են հավասար այդ էջերը): Ուրեմն MN և M_1N_1 ներքնաձիգները նույնպես հավասար են: Հետևաբար **M և N կետերի հեռավորությունը հավասար է իրենց համաչափ M_1 և N_1 կետերի հեռավորությանը** (M, N, M_1 և N_1 կետերի դասավորության մյուս



Նկ. 29



Նկ. 30

դեպքերը պատկերված են նկար 30-ում. ինքնուրույն դիտարկեք դրանք և համոզվեք, որ այդ դեպքերում ևս $MN=M_1N_1$): Այսպիսով՝ առանցքային համաչափությունը այնպիսի արտապատկերում է, որը պահպանում է կետերի միջև հեռավորությունը: Ցանկացած արտապատկերում, որն օժտված է այդ հատկությամբ, կոչվում է շարժում (կամ տեղափոխում): Այսպիսով՝ **հարթության շարժումը հարթության այնպիսի արտապատկերումն է իր վրա, որը պահպանում է հեռավորությունները:**

Թե ինչու հարթության հեռավորություններ պահպանող արտապատկերումն անվանում են շարժում (կամ տեղափոխում), կարելի է պարզաբանել առանցքային համաչափության օրինակով: Առանցքային համաչափությունը կարելի է պատկերացնել որպես հարթության 180^0-ով պտույտ տարածության մեջ a առանցքի շուրջը: Նկար 31-ում ցույց է տրված, թե ինչպես է կատարվում այդպիսի պտույտը:

Նշենք, որ **հարթության կենտրոնային համաչափությունը նույնպես շարժում է** (դրանում համոզվեք ինքներդ՝ օգտվելով նկար 32-ից):

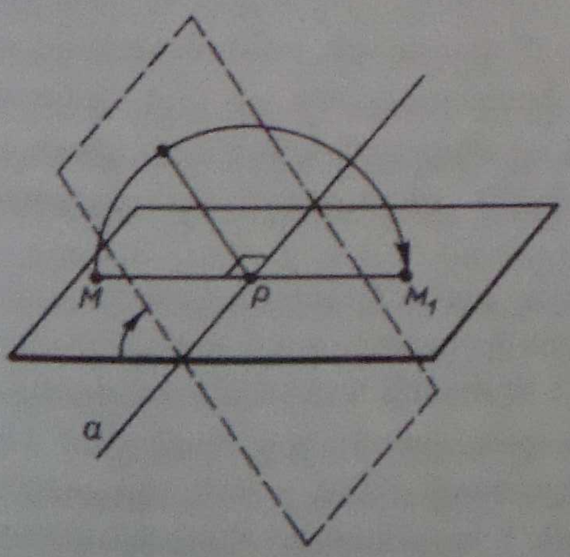
Ապացուցենք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ: ***Շարժման դեպքում հատվածն արտապատկերվում է հատվածի:***

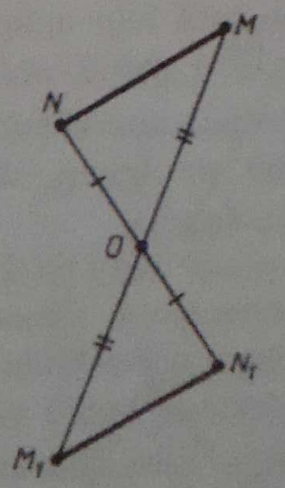
Ապացուցում: Դիցուք՝ տրված շարժման դեպքում MN հատվածի M և N ծայրակետերն արտապատկերվում են M_1 և N_1 կետերի (նկ. 33): Ապացուցենք, որ ամբողջ MN հատվածն արտապատկերվում է M_1N_1 հատվածի: Դիցուք՝ P-ն MN հատվածի կամայական կետ է, իսկ P_1-ը այն կետն է, որին արտապատկերվում է P կետը: Այդ դեպքում $MP+PN=MN$: Քանի որ շարժման դեպքում հեռավորությունները պահպանվում են, ապա

$$M_1N_1=MN, \quad M_1P_1=MP \quad \text{և} \quad N_1P_1=NP: \qquad (1)$$

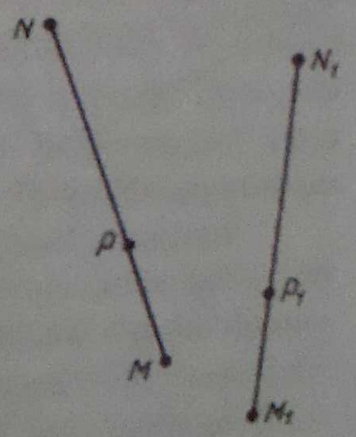
(1) հավասարություններից ստացվում է, որ $M_1P_1+P_1N_1=M_1N_1$ և, հետևաբար, P_1 կետն ընկած է M_1N_1 հատվածի վրա (հակառակ դեպքում՝ եթե



Նկ. 31



Նկ. 32



Նկ. 33

ենթադրենք, թե P_1-ն ընկած չէ M_1N_1 հատվածի վրա, ապա տեղի կունենար $M_1P_1+P_1N_1>M_1N_1$ անհավասարությունը): Այսպիսով՝ MN հատվածի կետերն արտապատկերվում են M_1N_1 հատվածի կետերին:

Դեռևս մնում է ապացուցել, որ M_1N_1 հատվածի ամեն մի P_1 կետին արտապատկերվում է MN հատվածի մի որևէ P կետ: Ապացուցենք այդ պնդումը: Դիցուք P_1-ը M_1N_1 հատվածի կամայական կետ է, որին այդ շարժման դեպքում արտապատկերվել է P կետը: Ապացուցենք, որ տվյալ P կետը MN հատվածի վրա ընկած կետ է: Իսկապես, (1) հավասարություններից և $M_1N_1=M_1P_1+P_1N_1$ հավասարությունից հետևում է, որ $MP+PN=MN$: Հենց սա էլ հաստատում է, որ P կետն ընկած է MN հատվածի վրա: Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք: ***Շարժման դեպքում եռանկյունն արտապատկերվում է իրեն հավասար եռանկյան:***

Բանն այն է, որ ըստ ապացուցված թեորեմի՝ շարժման դեպքում եռանկյան յուրաքանչյուր կողմն արտապատկերվում է իրեն հավասար հատվածի, ուրեմն՝ եռանկյունը արտապատկերվում է համապատասխանաբար հավասար կողմերով եռանկյան, իսկ դրանից էլ հենց հետևում է, որ այդ եռանկյունները հավասար են:

Ապացուցված թեորեմից օգտվելով՝ հեշտ է համոզվել, որ շարժման դեպքում ուղիղն արտապատկերվում է ուղղի, ճառագայթը՝ ճառագայթի, իսկ անկյունը՝ իրեն հավասար անկյան:

11* Վերադրումները և շարժումները

Երկրաչափության դասընթացում պատկերների հավասարության հասկացությունը սահմանվում է վերադրումների միջոցով: Ասում են, որ Φ պատկերը հավասար է Φ_1 պատկերին, եթե Φ պատկերը կարող է վերադրումով համընկնել Φ_1 պատկերին: Վերադրման հասկացությունը մեր դասընթացում դասվում է հիմնական հասկացությունների թվին, և այդ առումով նրա սահմանումը չի տրվում: Φ պատկերի վերադրումը Φ_1 պատկերին մենք պատկերացնում ենք որպես Φ պատկերի որևէ արտապատկերում Φ_1 պատկերի վրա: Ավելին, մենք համաձայնում ենք, որ այդ դեպքում որոշակի կետերի են արտապատկերվում ոչ միայն Φ պատկերի կետերը, այլև հարթության ամեն մի կետը, այսինքն՝ **վերադրումը հարթության արտապատկերումն է իր վրա:**

Սակայն, հարթության՝ ինքն իր վրա ոչ ամեն մի արտապատկերումն ենք մենք անվանում վերադրում: Վերադրումը հարթության այնպիսի արտապատկերումն է իր վրա, որն օժտված է որոշակի աքսիոմներով արտահայտված հատկություններով (տե՛ս 8-րդ դաս. դասագրքի հավելված 1-ի 7–13 աքսիոմները և 10-րդ դաս. դասագրքի հավելվածի 11-17 աքսիոմները): Այդ աքսիոմների հիման վրա կարելի է ապացուցել վերադրումների

---

* Այս կետի նյութը չի նախատեսվում պարտադիր ուսուցման համար:

բոլոր այն հատկությունները, որոնք մենք դիտարկելով ակնառու պատկերացումների հիման վրա՝ օգտագործում ենք թեորեմներ ապացուցելիս և խնդիրներ լուծելիս:

Օրինակ՝ ապացուցենք, որ **վերադրման դեպքում տարբեր կետերը արտապատկերվում են տարբեր կետերի:**

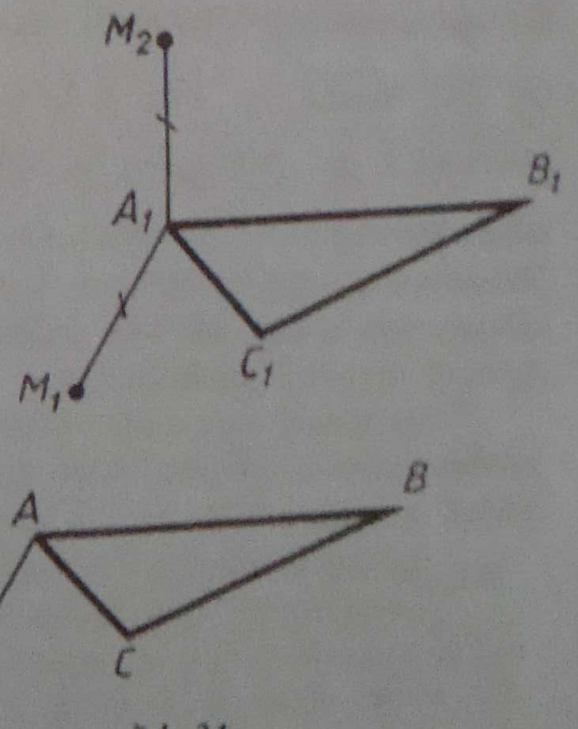
Իսկապես, ենթադրենք հակառակը, այսինքն՝ ընդունենք, թե ինչ-որ վերադրման դեպքում որևէ A և B երկու կետերը արտապատկերվում են միևնույն C կետի: Այդ դեպքում ստացվում է, որ A և B կետերից կազմված Φ_1 պատկերը հավասար է մեկ՝ C կետից կազմված Φ_2 պատկերին: Դրանից հետևում է, որ $\Phi_2=\Phi_1$, այսինքն՝ կա ինչ-որ մի վերադրում, որով Φ_2 պատկերը արտապատկերվում է Φ_1 պատկերի: Սինչդեռ դա անհնար է, քանի որ վերադրումը արտապատկերում է, իսկ յուրաքանչյուր արտապատկերման դեպքում C կետը համադրվում է հարթության միայն մեկ կետի:

Ապացուցված պնդումից հետևում է, որ վերադրման դեպքում հատվածն արտապատկերվում է իրեն հավասար հատվածի: Իսկապես, դիցուք AB հատվածի A և B ծայրակետերը վերադրման դեպքում արտապատկերվում են A_1 և B_1 կետերի: Այդ դեպքում AB հատվածն արտապատկերվում է A_1B_1 հատվածի (հարթաչափության աքսիոմ 7-ը), և ուրեմն, AB հատվածը հավասար է A_1B_1 հատվածին: Քանի որ հավասար հատվածների երկարությունները հավասար են, ապա վերադրումը հարթության այնպիսի արտապատկերումն է իր վրա, որը պահպանում է հեռավորությունները, այսինքն՝ **հարթության ցանկացած վերադրում շարժում է:**

Ապացուցենք, որ ճշմարիտ է նաև հակադարձ պնդումը:

Թեորեմ: ***Ցանկացած շարժում վերադրում է:***

Ապացուցում: Դիտարկենք կամայական շարժում (այն նշանակենք g տառով) և ապացուցենք, որ այն վերադրում է: Վերցնենք որևէ ABC եռանկյուն: g շարժման դեպքում այն արտապատկերվում է իրեն հավասար $A_1B_1C_1$ եռանկյանը: Ըստ եռանկյունների հավասարության սահմանման՝ գոյություն ունի f վերադրում, որով A, B և C կետերը արտապատկերվում են, համապատասխանաբար, A_1, B_1 և C_1 կետերի:



Նկ. 34

Ապացուցենք, որ g շարժումը համընկնում է f վերադրմանը: Ենթադրենք հակառակը՝ թե դրանք չեն համընկնում: Այդ դեպքում հարթության վրա կգտնվի

գոնե մեկ այնպիսի M կետ, որը g շարժման դեպքում արտապատկերվում է M_1 կետի, իսկ f վերադրման դեպքում՝ մի ուրիշ M_2 կետի: Քանի որ f և g արտապատկերումների դեպքում հեռավորությունները պահպանվում են, ապա $AM=A_1M_1$, $AM=A_1M_2$, որտեղից՝ $A_1M_1=A_1M_2$, այսինքն՝ A_1 կետը հավասարահեռ է M_1 և M_2 կետերից (նկ. 34):

Համանման ձևով ապացուցվում է, որ B_1 և C_1 կետերը ևս հավասարահեռ են M_1 և M_2 կետերից: Դրանից հետևում է, որ A_1, B_1, C_1 կետերն ընկած են M_1M_2 հատվածի միջնուղղահայացի վրա: Սակայն դա անհնար է, որովհետև $A_1B_1C_1$ եռանկյան գագաթներն ընկած չեն մի ուղղի վրա:

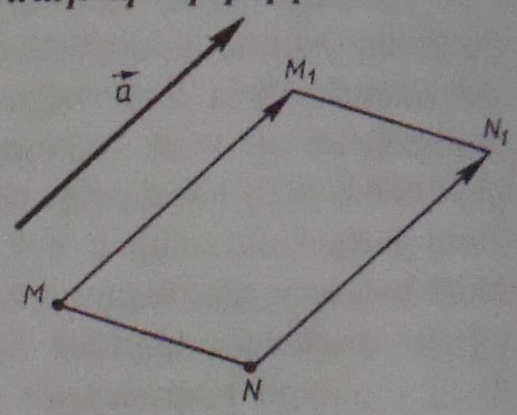
Այսպիսով f և g արտապատկերումները համընկնում են, այսինքն՝ g շարժումը վերադրում է: Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք: ***Շարժման դեպքում ցանկացած պատկեր արտապատկերվում է իրեն հավասար պատկերի:***

12 Զուգահեռ տեղափոխում և պտույտ

Դիցուք՝ $\vec{a}$-ն տրված վեկտոր է:

Հարթության արտապատկերումն իր վրա կոչվում է **զուգահեռ տեղափոխում $\vec{a}$ վեկտորով,** եթե այդ դեպքում յուրաքանչյուր M կետ արտապատկերվում է մի այնպիսի M_1 կետի, որ $\vec{MM_1}$ վեկտորը հավասար է $\vec{a}$ վեկտորին (նկ. 35):



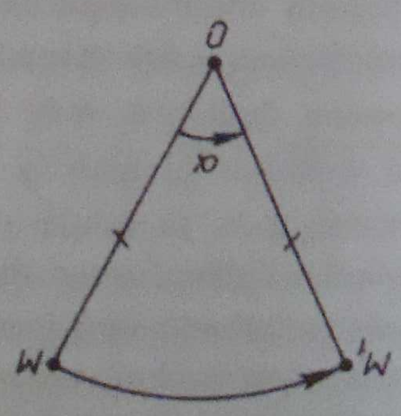
Նկ. 35

Զուգահեռ տեղափոխումը շարժում է, այսինքն հարթության այնպիսի արտապատկերումն է իր վրա, որը պահպանում է հեռավորությունները: Ապացուցենք այս պնդումը: Դիցուք՝ $\vec{a}$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխման դեպքում M և N կետերն արտապատկերվում են M_1 և N_1 կետերի (տե՛ս նկ. 35): Քանի որ $\vec{MM_1}=\vec{a}$ և $\vec{NN_1}=\vec{a}$, ապա $\vec{MM_1}=\vec{NN_1}$: Դրանից հետևում է, որ $MM_1 \parallel NN_1$ և $MM_1=NN_1$, ուրեմն՝ MM_1N_1N քառանկյունը զուգահեռագիծ է: Հետևաբար՝ $MN=M_1N_1$, այսինքն M և N կետերի հեռավորությունը հավասար է M_1 և N_1 կետերի հեռավորությանը (այն դեպքը, երբ M և N կետերը դասավորված են $\vec{a}$ վեկտորին զուգահեռ ուղղի վրա, դիտարկեք ինքնուրույն):

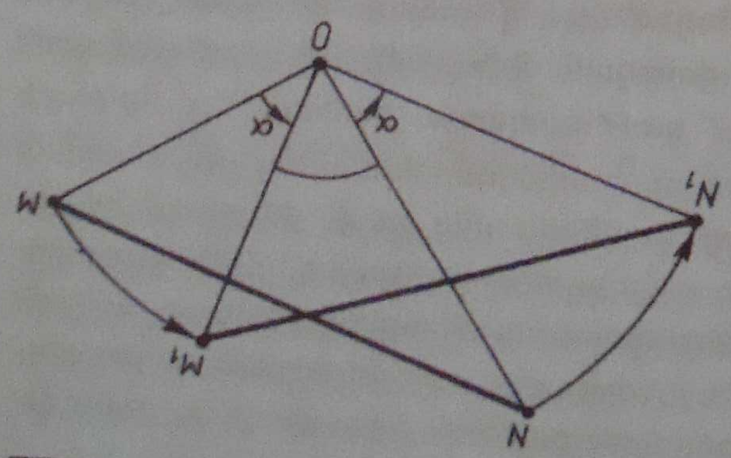
Այսպիսով՝ զուգահեռ տեղափոխումը կետերի միջև հեռավորությունը պահպանում է և, հետևապես, այն շարժում է: Այդ շարժումը ակնառու կերպի է պատկերացնել որպես հարթության սահում $\vec{a}$ վեկտորի երկայնքով:

Այժմ դիտարկենք մեկ այլ շարժում, որ կոչվում է **պտույտ:**

Հարթության վրա նշենք O կետ (պտույտի կենտրոնը) և α անկյուն (պտույտի անկյունը): Հարթության արտապատկերումն իր վրա կոչվում է **α անկյունով պտույտ O կետի շուրջը,** եթե այդ դեպքում յուրաքանչյուր M կետ արտապատկերվում է այնպիսի M_1 կետի, որ $OM=OM_1$, և MOM_1



Նկ. 36



Նկ. 37

անկյուն հավասար է α աստիճան (նկ. 36): Նշա՛ր պատրաստ O կետը այնտեղ, այնպես որ հեռավորությունը նրանից մինչև կողմերից մեկը լինի ոչ պակաս, քան մյուս հեռավորությունները: Նկատի ունենալով, որ $MN=M_1N_1$, այնպե՛ս տեղադրիր M և N կետերի հետ համապատասխանաբար M_1 և N_1 կետերը (նկ. 37): OMN և OM_1N_1 եռանկյունները հավասար են՝ ըստ երկու կողմի և նրանց կազմած անկյան. $OM=OM_1$, $ON=ON_1$, և $\angle MON=\angle M_1ON_1$ (նկ. 37-ում պատկերված տեղերում այդ անկյունները յուրաքանչյուրը հավասար է α աստիճան և M_1ON անկյան ընդհանուր մասն է): Այդ եռանկյունների հավասարությունից հետևում է, որ $MN=M_1N_1$, այսինքն՝ M և N կետերի հեռավորությունը հավասար է M_1 և N_1 կետերի հեռավորությունից (ինքդուրգ պետք է ստուգես, որ O, M և N կետերը ըմիաձ են մի ուղղի վրա):

Նշանակում՝ պահանջվող կետերի մեջ են մտնում և՛ այն կետերը, որոնք գտնվում են $\angle XOY$-ի կողմերից հավասարաչափ հեռավորության վրա, և՛ այն կետերը, որոնք գտնվում են M և N կետերից հավասարաչափ հեռավորության վրա: Եթե MN հատվածը զուգահեռ չէ OX կողմին, ապա այդ կետերից մեկը կլինի $\angle XOY$-ի ներսում, իսկ մյուսը՝ ուղիղ MN-ի հետ $\angle XOY$-ի հակադիր կողմում: Եթե MN հատվածը զուգահեռ է OX կողմին, ապա պահանջվող կետերից մեկը կլինի $\angle XOY$-ի ներսում, իսկ մյուսը՝ $\angle XOY$-ի հակադիր կողմում:

13 Տարածության շարժումը

Մեզ բավից հետո, երբ ծանոթացած հարթության շարժումներին, այժմ ենթադնենք տարածության շարժման հասկացությունը: Դասական ուսումնասիրենք, թե ինչ է գշաձիսւ տարածության արտապատկերում մի փոխ հաստատուն է որևէ M կետ, ըստ որում՝ տարածության ամեն մի M կետ հաստատված է

մի որևէ M կետի: Այդ դեպքում ասում են, որ տրված է **տարածության արտապատկերում** իր վրա: Նաև ասում են, որ տրված արտապատկերման դեպքում M **կետը փոխադրվում (արտապատկերվում) է** M_1 **կետին:** Ասելով **տարածության շարժում** հասկանում են տարածության այնպիսի արտապատկերումն իր վրա, որի դեպքում ցանկացած երկու A և B կետեր փոխադրվում (արտապատկերվում) են որևէ A_1 և B_1 կետերի այնպես, որ $AB=A_1B_1$: Այլ խոսքով՝ **տարածության շարժումը նրա այնպիսի արտապատկերումն է իր վրա, որը պահպանում է կետերի միջև հեռավորությունը:** Շարժման օրինակ է **կենտրոնային համաչափությունը,** այսինքն տարածության այն արտապատկերումն իր վրա, որի դեպքում ցանկացած M կետ փոխադրվում է O կենտրոնի նկատմամբ իրեն համաչափ M_1 կետին:

Ապացուցենք, որ **կենտրոնային համաչափությունը շարժում է:** Համաչափության կենտրոնը նշանակենք O տառով և ներմուծենք $Oxyz$ ուղղանկյուն կոորդինատների համակարգ այնպես, որ O կետը լինի նրա սկզբնակետը: Դիցուք՝ $M(x; y; z)$ և $M_1(x_1; y_1; z_1)$ կետերը համաչափ են O կենտրոնի նկատմամբ: Բացահայտենք կապ այդ երկու կետերի կոորդինատների միջև: Եթե M կետը չի համընկնում O կենտրոնին, ապա O-ն MM_1 հատվածի միջնակետն է: Ըստ հատվածի միջնակետի կոորդինատների բանաձևի՝ ստանում ենք. $\frac{x+x_1}{2}=0$, $\frac{y+y_1}{2}=0$, $\frac{z+z_1}{2}=0$, որոնցից հետևում է, որ $x_1=-x$, $y_1=-y$, $z_1=-z$: Այս բանաձևերը ճիշտ են նաև այն դեպքում, երբ M և O կետերը համընկնում են (պարզաբանեք՝ ինչու):

Այժմ դիտարկենք երկու կետեր՝ $A(x_1; y_1; z_1)$ և $B(x_2; y_2; z_2)$ և ապացուցենք, որ դրանց համաչափ A_1 և B_1 կետերի հեռավորությունը հավասար է AB-ի: A_1 և B_1 կետերն ունեն $A_1(-x_1; -y_1; -z_1)$ և $B_1(-x_2; -y_2; -z_2)$ կոորդինատները: Ըստ երկու կետերի հեռավորության բանաձևի՝ ստացվում է.

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

$$A_1B_1=\sqrt{(-x_2+x_1)^2+(-y_2+y_1)^2+(-z_2+z_1)^2}:$$

Այս առնչություններից հետևում է, որ $AB=A_1B_1$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

14 Առանցքային համաչափություն

a առանցքով **առանցքային համաչափություն** կոչվում է տարածության այնպիսի արտապատկերումն իր վրա, որի դեպքում ամեն մի M կետ փոխադրվում է a առանցքի նկատմամբ իրեն համաչափ M_1 կետին:

Ապացուցենք, որ **առանցքային համաչափությունը շարժում է:** Դրա համար ներմուծենք $Oxyz$ ուղղանկյուն կոորդինատների համակարգն այնպես, որ Oz առանցքը համընկնի համաչափության առանցքին: Դիցուք՝

$M(x; y; z)$ և $M_1(x_1; y_1; z_1)$ կետերը Oz առանցքի նկատմամբ համաչափ կետեր են: Բացահայտենք կապ այդ երկու կետերի կոորդինատների միջև: Եթե M կետն ընկած չէ Oz առանցքի վրա, ապա Oz առանցքը **1)** անցնում է MM_1 հատվածի միջնակետով և **2)** ուղղահայաց է այդ հատվածին: Առաջին պայմանից, ըստ հատվածի միջնակետի կոորդինատների բանաձևի, ստանում ենք. $\frac{x+x_1}{2}=0$ և $\frac{y+y_1}{2}=0$, որոնցից հետևում է, որ $x_1=-x$ և $y_1=-y$: Երկրորդ պայմանը նշանակում է, որ M և M_1 կետերի ապլիկատները միմյանց հավասար են, այսինքն՝ $z_1=z$: Ստացված բանաձևերը ճիշտ են նաև այն դեպքում, երբ M կետն ընկած է Oz առանցքի վրա (պարզաբանեք՝ ինչու):

Այժմ դիտարկենք ցանկացած երկու կետեր՝ $A(x_1; y_1; z_1)$ և $B(x_2; y_2; z_2)$: Ապացուցենք, որ դրանց համաչափ A_1 և B_1 կետերի հեռավորությունը հավասար է AB-ի: A_1 և B_1 կետերն ունեն $A_1(-x_1; -y_1; z_1)$ և $B(-x_2; -y_2; z_2)$ կոորդինատները: Ըստ երկու կետերի հեռավորության բանաձևի՝ ստացվում է.

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

$$A_1B_1=\sqrt{(-x_2+x_1)^2+(-y_2+y_1)^2+(z_2-z_1)^2}:$$

Այս առնչություններից հետևում է, որ $AB=A_1B_1$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

15 Հայելային համաչափություն

Հայելային համաչափություն (համաչափություն α հարթության նկատմամբ) կոչվում է տարածության այնպիսի արտապատկերումն իր վրա, որի դեպքում ամեն մի M կետ փոխադրվում է α հարթության նկատմամբ իրեն համաչափ M_1 կետին:

Ապացուցենք, որ **հայելային համաչափությունը շարժում է:** Դրա համար ներմուծենք $Oxyz$ ուղղանկյուն կոորդինատների համակարգն այնպես, որ Oxy հարթությունը համընկնի համաչափության հարթությանը: Դիցուք՝ $M(x; y; z)$ և $M_1(x_1; y_1; z_1)$ կետերը Oxy հարթության նկատմամբ համաչափ կետեր են: Բացահայտենք կապ այդ երկու կետերի կոորդինատների միջև: Եթե M կետն ընկած չէ Oxy հարթության մեջ, ապա այդ հարթությունը **1)** անցնում է MM_1 հատվածի միջնակետով և **2)** ուղղահայաց է այդ հատվածին: Առաջին պայմանից, ըստ հատվածի միջնակետի կոորդինատների բանաձևի, ստանում ենք $\frac{z+z_1}{2}=0$, որից հետևում է, որ $z_1=-z$: Երկրորդ պայմանը նշանակում է, որ MM_1 հատվածը զուգահեռ է Oz առանցքին և, հետևաբար, $x_1=x$, $y_1=y$: Ստացված բանաձևերը ճիշտ են նաև այն դեպքում, երբ M կետն ընկած է Oxy հարթության մեջ (պարզաբանեք՝ ինչու):

Այժմ դիտարկենք երկու կետեր՝ $A(x_1;y_1;z_1)$ և $B(x_2;y_2;z_2)$: Ապացուցենք, որ դրանց համաչափ A_1 և B_1 կետերի հեռավորությունը հավասար է AB-ի:

A_1 և B_1 կետերն ունեն $A_1(x_1;y_1;-z_1)$ և $B_1(x_2;y_2;-z_2)$ կոորդինատները: Ըստ երկու կետերի հեռավորության բանաձևի՝ ստացվում է.

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ ,$$

$$A_1B_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(-z_2+z_1)^2}\ :$$

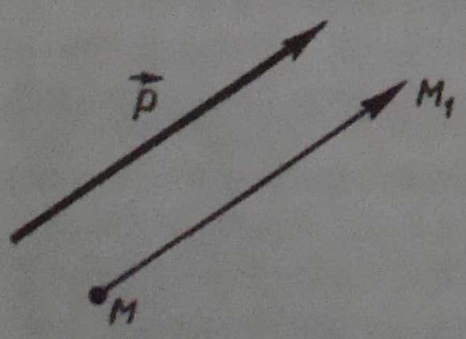
Այս առնչությունից հետևում է, որ $AB=A_1B_1$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

16 Զուգահեռ տեղափոխում

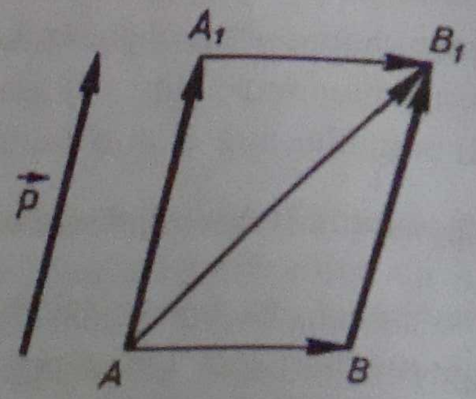
Քննության առնենք տարածության շարժման ևս մեկ օրինակ: Դիցուք՝ $\bar{p}$-ն կամայական վեկտոր է: Տարածության՝ ինքն իր վրա արտապատկերումը կոչվում է **զուգահեռ տեղափոխում** $\bar{p}$ վեկտորով, եթե ցանկացած M կետ փոխադրվում է մի այնպիսի M_1 կետի, որ $\vec{MM_1}$ վեկտորը հավասար է $\bar{p}$ վեկտորին (նկ. 38,ա):

Ապացուցենք, որ **զուգահեռ տեղափոխումը շարժում է:** $\bar{p}$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխման դեպքում ցանկացած երկու՝ A և B կետերը փոխադրվում են այնպիսի A_1 և B_1 կետերի, որ $\vec{AA_1}=\bar{p}$ և $\vec{BB_1}=\bar{p}$: Պահանջվում է ապացուցել, որ $A_1B_1=AB$: Ըստ եռանկյան կանոնի՝ $\vec{AB_1}=\vec{AA_1}+\vec{A_1B_1}$: Մյուս կողմից՝ $\vec{AB_1}=\vec{AB}+\vec{BB_1}$ (նկ. 38,բ): Այս երկու հավասարություններից հետևում է, որ $\vec{AA_1}+\vec{A_1B_1}=\vec{AB}+\vec{BB_1}$, կամ $\bar{p}+\vec{A_1B_1}=\vec{AB}+\bar{p}$, որից ստացվում է, որ $\vec{A_1B_1}=\vec{AB}$: Հետևաբար՝ $A_1B_1=AB$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Կարելի է ապացուցել, որ ցանկացած շարժման դեպքում հատվածը փոխադրվում է հատվածի, ուղիղը՝ ուղղի, հարթությունը՝ հարթության: Պարզվում է, որ վերադրման հասկացությունը, որի միջոցով մեր դասըն-



ա)



բ)

Նկ. 38

դասագրքի ենթադրվում հայտնաբերված հատկացուցիչը (տե՛ս հավելված) հաշվեհատ է շարժման հատկացուցիչ, այնպես՝ ցանկացած վեկտոր շարժման է՝ ն, ընդհատման ենթարկվում:

Խնդիրներ

103. Գտեք այն կետերի կոորդինատները, որոց փոխադարձ են $A(0;1;2)$, $B(3;-1;4)$, $C(1;0;2)$ կետերը. **ա)** կոորդինատների սկզբնակետ ունեցող, **բ)** կոորդինատների հաշվարկման նկարագրված ուղղանկյուն համակարգում, **գ)** կոորդինատների հարթությունների նկատմամբ հաշվարկման նկարագրված:

104. Ապացուցեք, որ կենտրոնական հաշվարկման նկարագրված. **ա)** հաշվարկման նկարագրված կենտրոնական չափորոշիչ կոորդինատների համակարգում, **բ)** հաշվարկման կենտրոնական չափորոշիչ կոորդինատների համակարգում է հետևյալ պնդումը՝ հաշվարկման կենտրոնական չափորոշիչ կոորդինատների համակարգում է հետևյալ պնդումը:

105. Ապացուցեք, որ կենտրոնական հաշվարկման նկարագրված. **ա)** հաշվարկման կենտրոնական չափորոշիչ կոորդինատների համակարգում է հետևյալ պնդումը՝ հաշվարկման կենտրոնական չափորոշիչ կոորդինատների համակարգում է հետևյալ պնդումը:

106. Ապացուցեք, որ ամենաշատը հաշվարկման նկարագրված. **ա)** ամենաքան որոշված կետերով անցնում է շրջանագիծ, այնպես՝ ցանկացած շրջանագիծ է, ընդհատման է ն, ընդհատման է շրջանագիծ:

107. Հաշվարկման ամենահետաքրքրական նկարագրված a ուղղի ամենահետաքրքրական է a_1 ուղղի: Ապացուցեք, որ a և a_1 ուղղերը ընկած են մի հարթության մեջ:

108. α հարթության ճիշտշար հաշվարկման հաշվառված նկարագրված β հարթությունը ամենահետաքրքրական է β_1 հարթությանը: Ապացուցեք, որ **ա)** եթե $\beta\|\alpha$, ապա $\beta_1\|\alpha$, **բ)** եթե $\beta\perp\alpha$, ապա β_1-ը հատընկած է β-ին:

109. Ապացուցեք, որ ոչ զրոյական $\vec{p}$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխման չի տվյալ վեկտորը՝ **ա)** ուղիղը, որը զուգահեռ է $\vec{p}$ վեկտորի և այլ վեկտորի չի ընդհատում, **բ)** ուղիղ, ամենահետաքրքրական է իրեն զուգահեռ ուղիղ, որը զուգահեռ է $\vec{p}$ վեկտորով կամ ընդհատում է այլ վեկտորի, ամենահետաքրքրական է իրեն:

110. $A_1B_1C_1$ եռանկյունը ստացվել է ABC եռանկյան $\vec{a}$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխության միջոցով: M_1 և M կետերը, համապատասխանաբար, $A_1B_1C_1$ և ABC եռանկյունների միջնագծերի հատման կետերն են:

Ապացուցեք, որ $\bar{a}$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխման դեպքում M կետը փոխադրվում է M_1 կետին:

111. Ապացուցեք, որ շարժման դեպքում՝ **ա)** ուղիղն արտապատկերվում է ուղղի, **բ)** հարթությունն արտապատկերվում է հարթության:

112. Ապացուցեք, որ շարժման դեպքում՝ **ա)** հատվածն արտապատկերվում է հատվածի, **բ)** անկյունն արտապատկերվում է իրեն հավասար անկյան:

113. Ապացուցեք, որ շարժման դեպքում՝ **ա)** զուգահեռ ուղիղներն արտապատկերվում են զուգահեռ ուղիղների, **բ)** զուգահեռ հարթություններն արտապատկերվում են զուգահեռ հարթությունների:

114. Ապացուցեք, որ շարժման դեպքում՝ **ա)** շրջանագիծն արտապատկերվում է նույն շառավիղով շրջանագծի, **բ)** ուղղանկյունանիստը արտապատկերվում է նույն չափումներով ուղղանկյունանիստի:

Կառուցումներ հարթության վրա

115. Գծագրեք AB հատված և $\vec{MM_1}$ վեկտոր: Կառուցեք A_1B_1 հատվածը, որը ստացվում է AB հատվածից՝ $\vec{MM_1}$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխմամբ:

116. Գծագրեք ABC եռանկյուն, $\vec{MM_1}$ վեկտոր, որը զուգահեռ չէ եռանկյան կողմերից ոչ մեկին, և մի $\bar{a}$ վեկտոր, որը զուգահեռ է AC կողմին: Կառուցեք $A_1B_1C_1$ այն եռանկյունը, որը ստացվում է ABC եռանկյունից՝ զուգահեռ տեղափոխմամբ՝ **ա)** $\vec{MM_1}$ վեկտորով, **բ)** $\bar{a}$ վեկտորով:

117. Տրված են AC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյունը և AC ուղղի վրա մի D կետ՝ այնպիսին, որ C կետն ընկած է AD հատվածի վրա: **ա)** Կառուցեք B_1D այն հատվածը, որը ստացվում է BC հատվածից՝ $\vec{CD}$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխմամբ: **բ)** Ապացուցեք, որ ABB_1D քառանկյունը հավասարասրուն սեղան է:

118. Տրված են եռանկյուն, սեղան, շրջանագիծ և $\bar{a}$ վեկտորը: Կառուցեք այն պատկերները, որոնք ստացվում են տրված պատկերներից՝ $\bar{a}$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխմամբ:

119. Կառուցեք A_1B_1 հատվածը, որը ստացվում է տրված AB հատվածից՝ տրված O կենտրոնի շուրջը պտույտի դեպքում՝ **ա)** ժամսլաքի ուղղությամբ 120^0-ով, **բ)** ժամսլաքին հակառակ ուղղությամբ 75^0-ով, **գ)** 180^0-ով:

120. Կառուցեք եռանկյունը, որը ստացվում է տրված ABC եռանկյունից՝ A կետի շուրջը ժամսլաքին հակառակ ուղղությամբ 150^0 անկյունով պտույտի դեպքում:

121. D կետը ABC հավասարակողմ եռանկյան կիսորդների հատման կետն է: Ապացուցեք, որ ABC եռանկյունը D կետի շուրջը ժամսլաքի ուղղությամբ 120^0 պտույտի դեպքում արտապատկերվում է ինքը՝ իրեն:

122. Կառուցեք շրջանագիծը, որը ստացվում է տրված C կենտրոնով շրջանագծից՝ ժամսլաքին հակառակ ուղղությամբ 60^0 անկյունով O կետի շուրջը պտույտի դեպքում, եթե. **ա)** C և O կետերը չեն համընկնում, **բ)** C և O կետերը համընկնում են:

123. Կառուցեք a_1 ուղիղը, որը ստացվում է տրված a ուղղից՝ O կետի շուրջը ժամսլաքի ուղղությամբ 60^0 անկյունով պտույտի դեպքում, եթե a ուղիղը՝ **ա)** չի անցնում O կետով, **բ)** անցնում է O կետով:

Լ ու ծ ու մ : **ա)** Կառուցենք O կենտրոնով շրջանագիծ, որը շոշափում է a ուղիղը (նկարագրեք, թե ինչպես է դա արվում): Դիցուք՝ M-ը շոշափման կետն է: O կետի շուրջը պտույտի դեպքում այդ շրջանագիծն արտապատկերվում է իր վրա, իսկ a շոշափողը՝ մի որևէ a_1 շոշափողի վրա (պարզաբանեք՝ ինչու): a_1 ուղիղը կառուցելու համար նախ՝ կառուցենք այն M_1 կետը, որին արտապատկերվում է M կետը O կետի շուրջը 60^0 անկյունով ժամսլաքի ուղղությամբ պտույտի դեպքում, իսկ այնուհետև տանենք շրջանագծին M_1 կետում շոշափող a_1 ուղիղը:

124. Օգտագործելով զուգահեռ տեղափոխումը՝ կառուցեք սեղանը՝ ըստ նրա հիմքերի և անկյունագծերի:

Հարցեր գլուխ I-ի վերաբերյալ

1. Կետը ինչպե՞ս է դասավորված ուղղանկյուն կոորդինատների համակարգի նկատմամբ, եթե. **ա)** նրա կոորդինատներից մեկը զրո է, **բ)** նրա երկու կոորդինատները զրո են:
2. Բացատրեք, թե ինչու Oxy հարթությանը զուգահեռ ուղղի վրա ընկած բոլոր կետերն ունեն միևնույն ապլիկատը:
3. Տրված են $A(2; 4; 5)$, $B(3; x; y)$, $C(0; 4; z)$ և $D(5; t; u)$ կետերը: x-ի, y-ի, z-ի, t-ի, u-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում են այդ կետերն ընկած՝ **ա)** Oxy հարթությանը զուգահեռ հարթության մեջ, **բ)** Oxz հարթությանը զուգահեռ հարթության մեջ, **գ)** Ox առանցքին զուգահեռ ուղղի վրա:
4. Գտեք $\vec{CA}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե տրված են $\vec{AB}\{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{BC}\{x_2; y_2; z_2\}$ վեկտորները:
5. Ոչ զրոյական $\vec{a}$ վեկտորի առաջին և երկրորդ կոորդինատները զրո են: Ինչպե՞ս է դասավորված $\vec{a}$ վեկտորը հետևյալ առանցքի նկատմամբ. **ա)** Oz, **բ)** Ox, **գ)** Oy:

6. Ո՞ր զրոյական $\vec{a}$ վեկտորի առաջին կոորդինատը զրո է: Ինչպե՞ս է դասավորված $\vec{a}$ վեկտորը՝ **ա)** Oyz հարթության նկատմամբ, **բ)** Ox առանցքի նկատմամբ, **գ)** Oxz հարթության նկատմամբ:
7. Արդյոք համագի՞ծ են հետևյալ վեկտորները. **ա)** $\vec{a}\{-5;3;-1\}$ և $\vec{b}\{6;-10;-2\}$, **բ)** $\vec{a}\{-2;3;7\}$ և $\vec{b}\{-1;1{,}5;3{,}5\}$:
8. M կետի շառավիղ-վեկտորի երկարությունը 1 է: Կարո՞ղ է, արդյոք, M վեկտորի աբսցիսը լինել. **ա)** 1, **բ)** 2:
9. $\vec{a}$ վեկտորի երկարությունը 3 է: Կարո՞ղ է, արդյոք, $\vec{a}$ վեկտորի կոորդինատներից մեկը լինել. **ա)** 3, **բ)** 5:
10. M_1 կետի աբսցիսը 3 է, իսկ M_2 կետի աբսցիսը՝ 6: **ա)** Կարո՞ղ է, արդյոք, M_1M_2 հատվածի երկարությունը լինել 2: **բ)** Ինչպե՞ս է դասավորված M_1M_2 հատվածը Ox առանցքի նկատմամբ, եթե նրա երկարությունը 3 է:
11. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներն ունեն a և b երկարություններ: Ինչի՞ է հավասար $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը, եթե. **ա)** $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համուղղված են, **բ)** $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները հակուղղված են, **գ)** $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներն ուղղահայաց են, **դ)** $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը 60^0 է, **ե)** $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը 120^0 է:
12. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը ի՞նչ պայմանի դեպքում է. **ա)** դրական, **բ)** բացասական, **գ)** զրո:
13. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդը: Արդյոք ուղղահայա՞ց են հետևյալ վեկտորները. **ա)** $\vec{AD}$ և $\vec{D_1C_1}$, **բ)** $\vec{BD}$ և $\vec{CC_1}$, **գ)** $\vec{A_1C_1}$ և $\vec{AD}$, **դ)** $\vec{DB}$ և $\vec{D_1C_1}$, **ե)** $\vec{BB_1}$ և $\vec{AC}$:
14. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների առաջին կոորդինատներն են, համապատասխանաբար, 1-ը և 2-ը: $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը կարո՞ղ է, արդյոք, լինել. **ա)** 2-ից փոքր, **բ)** 2-ին հավասար, **գ)** 2-ից մեծ:
15. Ի՞նչ կոորդինատներ ունի A կետը, եթե A կենտրոնով կենտրոնային համաչափության դեպքում $B(1;0;2)$ կետը փոխադրվում է $C(2;-1;4)$ կետին:
16. Հարթությունը ինչպե՞ս է դասավորված կոորդինատների Ox և Oz առանցքների նկատմամբ, եթե այդ հարթության նկատմամբ հայելային արտապատկերման դեպքում $M(2;1;3)$ կետը փոխադրվում է $M_1(2;-2,3)$ կետին:
17. Ա՞ջ, թե՞ ձախ ձեռնոցի է փոխադրվում աջ ձեռնոցը՝ հայելային համաչափության դեպքում, առանցքային համաչափության դեպքում, կենտրոնային համաչափության դեպքում:

Լրացուցիչ խնդիրներ

125. Տրված են $\vec{a}\{-5;0;5\}$, $\vec{b}\{-5;5;0\}$ և $\vec{c}\{1;-2;-3\}$ վեկտորները: Գտեք հետևյալ վեկտորների կոորդինատները. ա) $3\vec{b}-3\vec{a}+3\vec{c}$, բ) $-0,1\vec{c}+0,8\vec{a}-0,5\vec{b}$:

126. Արդյոք համապի՞ծ են հետևյալ վեկտորները. ա) $\vec{a}\{-5;3;-1\}$ և $\vec{b}\{6;-10;-2\}$, բ) $\vec{a}\{-2;3;7\}$ և $\vec{b}\{-1;1,5;3,5\}$, գ) $\vec{a}\left\{-\frac{2}{3};\frac{5}{9};-1\right\}$ և $\vec{b}\{6;-5;9\}$, դ) $\vec{a}\{0,7;-1,2;-5,2\}$ և $\vec{b}\{-2,8;4,8;-20,8\}$:

127. Տրված են $A(-5;7;3)$ և $B(3;-11;1)$ կետերը: ա) Ox առանցքի վրա գտեք այն կետը, որն ամենամոտն է AB հատվածի միջնակետին: բ) Գտեք համաձման հատկությամբ կետերը Oy և Oz առանցքների վրա:

128. Արդյոք համահա՞րթ են հետևյալ վեկտորները, ա) $\vec{a}\{-1;2;3\}$, $\vec{i}+\vec{j}$ և $\vec{i}-\vec{k}$, բ) $\vec{b}\{2;1;1,5\}$, $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ և $\vec{i}-\vec{j}$, գ) $\vec{a}\{1;1;1\}$, $\vec{b}\{1;-1;2\}$ և $\vec{c}\{2;3;-1\}$:

129. Տրված են $A(3;5;4)$, $B(4;6;5)$, $C(6;-2;1)$ և $D(5;-3;0)$ կետերը: Ապացուցեք, որ $ABCD$-ն զուգահեռագիծ է:

130. Տրված են $A(2;0;1)$, $B(3;2;2)$ և $C(2;3;6)$ կետերը: Գտեք ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետի կոորդինատները:

131. Տրված են $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի չորս գագաթների կոորդինատները. $A(3;0;2)$, $B(2;4;5)$, $A_1(5;3;1)$, $D(7;1;2)$: Գտեք մյուս գագաթների կոորդինատները:

132. AB հատվածի միջնակետն ընկած է Oxy հարթության մեջ: Գտեք k-ն, եթե. ա) $A(2;3;-1)$, $B(5;7;k)$, բ) $A(0;4;k)$, $B(3;-8;2)$, գ) $A(5;3;k)$, $B(3;-5;3k)$:

133. Գտեք միավոր այն վեկտորների կոորդինատները, որոնք համուղղված են, համապատասխանաբար, $\vec{a}\{2;1;-2\}$ և $\vec{b}\{1;3;0\}$ վեկտորներին:

134. $\vec{a}\{x;y;z\}$ վեկտորի երկարությունը 5 է: Գտեք $\vec{a}$ վեկտորի օրդինատը, եթե $x=2$, $z=-\sqrt{5}$:

135. Տրված են $M(2;-1;3)$, $N(-4;1;-1)$, $P(-3;1;2)$ և $Q(1;1;0)$ կետերը: Հաշվեք MN և PQ հատվածների միջնակետերի հեռավորությունը:

136. Գտեք $B(-2;5;\sqrt{3})$ կետի հեռավորությունը կոորդինատների առանցքներից:

137. Օրդինատների առանցքի վրա գտեք կետ, որը հավասարահեռ է $A(13;2;-1)$ և $B(-15;7;-18)$ կետերից:

138*. Գտեք $A(0; 2; 2)$, $B(2; 1; 1)$, $C(2; 2; 2)$ գագաթներով ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնի կոորդինատները:

139. ABC եռանկյան գագաթները դասավորված են α հարթության միևնույն կողմում և գտնվում են նրանից 4դմ, 5դմ և 9դմ հեռավորությունների վրա: Գտեք այդ եռանկյան միջնագծերի հատման կետի հեռավորությունը α հարթությունից:

140*. Քառանիստի միջնագիծ կոչվում է այն հատվածը, որը քառանիստի գագաթը միացնում է հանդիպակաց նիստի միջնագծերի հատման կետին: Ապացուցեք, որ քառանիստի միջնագծերը հատվում են մի կետում, որն այդ միջնագծերից յուրաքանչյուրը տրոհում է 3:1 հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից:

141. Տրված են $\vec{a}\{-1; 5; 3\}$, $\vec{b}\{3; 0; 2\}$, $\vec{c}\{0,5; -3; 4\}$ և $\vec{d}\{2; 1; 0\}$ վեկտորները: Հաշվեք. **ա)** $\vec{a}\vec{b}$-ն, **բ)** $\vec{a}\vec{c}$-ն, **գ)** $\vec{d}\vec{d}$-ն, **դ)** $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\vec{d}$-ն, **ե)** $(\vec{a}-\vec{b})(\vec{c}-\vec{d})$-ն:

142. $DABC$ բառանիստում $DA=DB=DC$, $\angle ADB=45^0$, $\angle BDC=60^0$: Հաշվեք հետևյալ վեկտորների կազմած անկյունը. **ա)** $\vec{DA}$ և $\vec{BD}$, **բ)** $\vec{DB}$ և $\vec{CB}$, **գ)** $\vec{BD}$ և $\vec{BA}$:

143. $ABCD$ քառանիստի բոլոր կողերը միմյանց հավասար են, D_1 կետը D կետի պրոյեկցիան է ABC հարթության վրա: Ուղղահայա՞ց են, արդյոք, հետևյալ վեկտորները. **ա)** $\vec{D_1B}$ և $\vec{D_1D}$, **բ)** $\vec{DD_1}$ և $\vec{BC}$, **գ)** $\vec{DA}$ և $\vec{BC}$, **դ)** $\vec{D_1B}$ և $\vec{DC}$:

144. Հաշվեք AB և CD ուղիղների կազմած անկյան կոսինուսը, եթե. **ա)** $A(7; -8; 15)$, $B(8; -7; 13)$, $C(2; -3; 5)$, $D(-1; 0; 4)$, **բ)** $A(8; -2; 3)$, $B(3; -1; 4)$, $C(5; -2; 0)$, $D(7; 0; -2)$:

145. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդում M կետը BB_1C_1C նիստի կենտրոնն է: Հաշվեք հետևյալ վեկտորների կազմած անկյունը. **ա)** $\vec{A_1D}$ և $\vec{AM}$, **բ)** $\vec{MD}$ և $\vec{BB_1}$:

146. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստում $\angle BAA_1=\angle BAD=\angle DAA_1=60^0$, $AB=AA_1=AD=1$: Հաշվեք $\vec{AC_1}$ և $\vec{BD_1}$ վեկտորների երկարությունները:

147. M կետի պրոյեկցիան $ABCD$ շեղանկյան հարթության վրա համընկնում է այդ շեղանկյան անկյունագծերի հատման O կետին: N կետը BC կողմի միջնակետն է, $AC=8$, $DB=MO=6$: Հաշվեք այն անկյան կոսինուսը, որ կազմում են MN ուղիղը և հետևյալ ուղիղը. **ա)** BC-ն, **բ)** DC-ն, **գ)** AC-ն, **դ)** DB-ն:

148. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդում M կետն ընկած է BB_1 կողի վրա, ընդ որում $BM:MB_1=3:2$, իսկ N կետը՝ AD կողի վրա, ընդ որում $AN:ND=2:3$:

Հաշվեք այն անկյան սինուսը, որ կազմում են MN ուղիղը և հետևյալ նիստի հարթությունը. **ա)** DD_1C_1C, **բ)** $A_1B_1C_1D_1$:

149. OA, OB, OC և OM ճառագայթները դասավորված են այնպես, որ $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=90^0$, $\angle AOM=\varphi_1$, $\angle BOM=\varphi_2$, $\angle COM=\varphi_3$. Ապացուցեք, որ $\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2+\cos^2\varphi_3=1$:

150. OA, OB և OC ճառագայթները դասավորված են այնպես, որ $\angle BOC=\angle BOA=45^0$, $\angle AOC=60^0$: OH ուղիղն ուղղահայաց է AOB հարթությանը: Գտեք OH և OC ուղիղների կազմած անկյունը:

151. Տրված է $CABD$ երկնիստ անկյունը, որը հավասար է φ ($\varphi<90^0$): Հայտնի է, որ $AC\perp AB$ և $\angle DAB=\theta$: Գտեք $\cos\angle CAD$-ն:

152. CA և DB հատվածներն ուղղահայաց են 120^0-ի հավասար $CABD$ երկնիստ անկյան կողին: Հայտնի է, որ $AB=m$, $CA=n$, $BD=p$: Գտեք CD-ն:

153. Շարժման դեպքում a ուղիղն արտապատկերվում է a_1 ուղղի, իսկ α հարթությունը՝ α_1 հարթության: Ապացուցեք, որ. **ա)** եթե $a\|\alpha$, ապա $a_1\|\alpha_1$, **բ)** եթե $a\perp\alpha$, ապա $a_1\perp\alpha_1$:

154. α հարթության նկատմամբ հայելային համաչափության դեպքում β հարթությունն արտապատկերվում է β_1 հարթությանը: Ապացուցեք, որ եթե β և α հարթությունները կազմում են φ անկյուն, ապա φ անկյուն են կազմում նաև β_1 և α հարթությունները:

155. Ապացուցեք, որ $\vec{p}$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխման դեպքում. **ա)** հարթությունը, որը զուգահեռ չէ $\vec{p}$ վեկտորին և այդ վեկտորը չի ընդգրկում, արտապատկերվում է իրեն զուգահեռ հարթության, **բ)** հարթությունը, որը զուգահեռ է $\vec{p}$ վեկտորին, կամ ընդգրկում է այդ վեկտորը, արտապատկերվում է իր վրա:

ԳԼՈՒԽ II

ԳԼԱՆ, ԿՈՆ ԵՎ ԳՈՒՆԴ

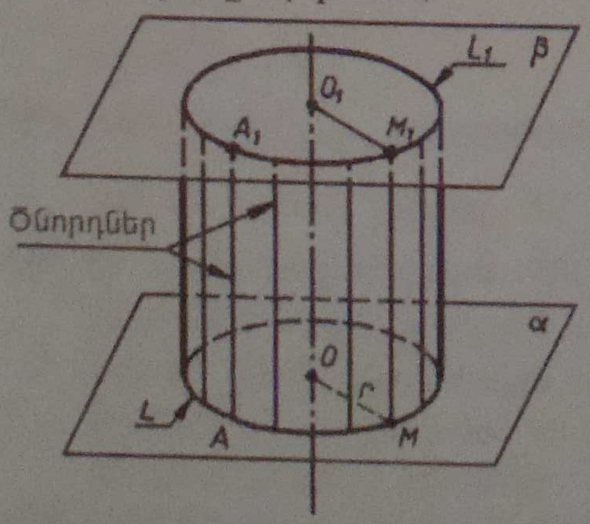
§1 Գլան

17 Գլանի հասկացությունը

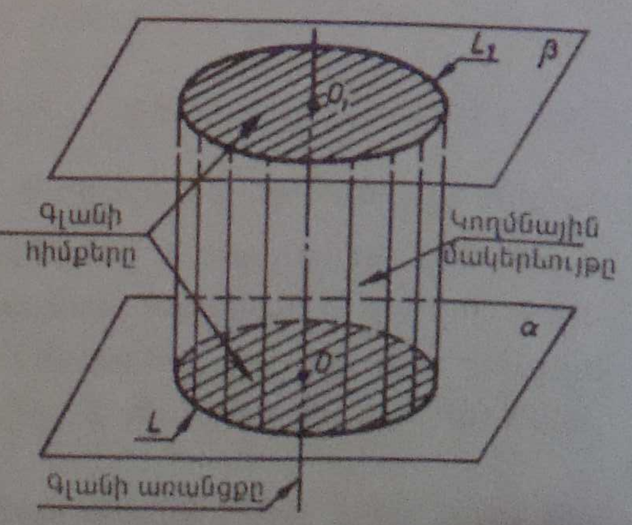
Դիտարկենք α և β երկու զուգահեռ հարթությունները և α հարթության մեջ ընկած L շրջանագիծը, որի շառավիղը r է, և կենտրոնը O կետն է (նկ.39): L շրջանագծի յուրաքանչյուր կետով տանենք α հարթությանն ուղղահայաց ուղիղ: Այդ ուղիղների այն հատվածները, որոնք առնված են α և β հարթությունների միջև, կազմում են **գլանային մակերևույթ**: Հատվածներն իրենք, կոչվում են **գլանային մակերևույթի ծնորդներ** (նկար 39-ում պատկերված են AA_1, MM_1 և այլ ծնորդներ):

Ըստ կառուցման՝ ծնորդների մեկական ծայրակետերը, որոնք ընկած են α հարթության մեջ, ամբողջապես լրացնում են L շրջանագիծը: Ծնորդների մյուս ծայրակետերը, որոնք ընկած են β հարթության մեջ, լրացնում են r շառավիղով մի L_1 շրջանագիծ: Այդ շրջանագծի O_1 կենտրոնը β հարթության հատման կետն է այն ուղղի հետ, որն անցնում է O կետով և ուղղահայաց է α հարթությանը:

Այս պնդման ճշմարիտ լինելը հետևում է այն բանից, որ ծնորդների β հարթության մեջ ընկած ծայրակետերի բազմությունը ստացվում է L շրջանագծից $\vec{OO_1}$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխմամբ: Զուգահեռ տեղափոխումը շարժում է և, ուրեմն, վերադրում է: Իսկ վերադրման դեպքում յուրաքանչյուր պատկեր փոխադրվում է իրեն հավասար պատկերի: Հետևաբար $\vec{OO_1}$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխման դեպքում L շրջանագիծը փոխադրվում է իրեն հավասար L_1 շրջանագծին, որի շառավիղը r է, և կենտրոնը O_1 կետն է:



Նկ. 39



Նկ. 40

շրջանագիծը կոչուում են **գլանի ծնորդներ**, OO_1 ուղիղը՝ **գլանի առանցք**:

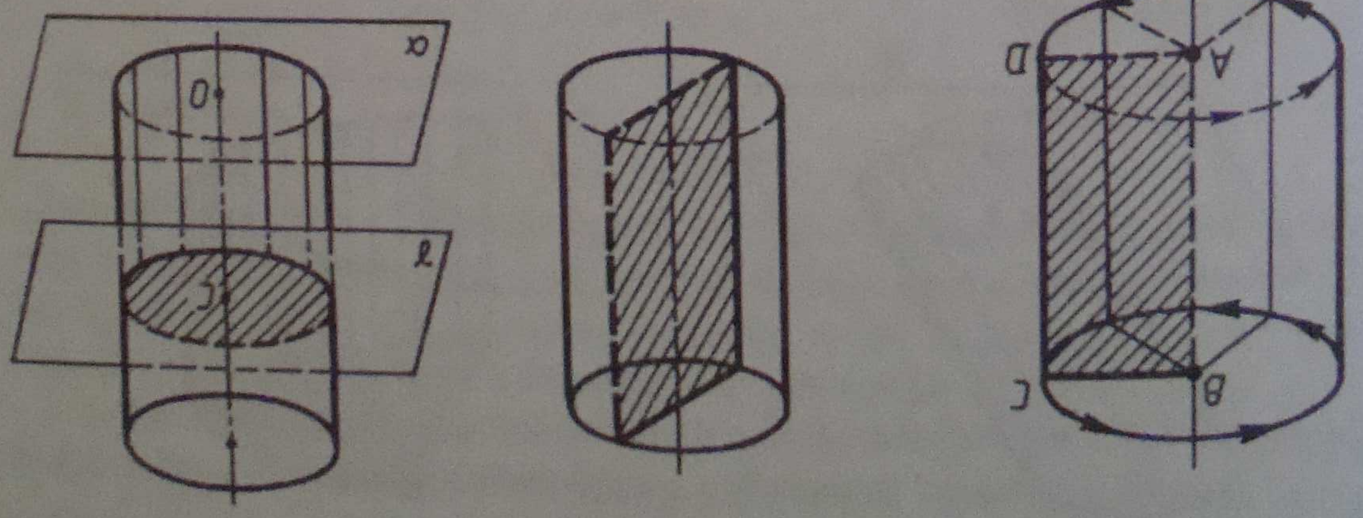
Գլանի բոլոր ծնորդները զուգահեռ են և հաւասար միմեանց՝ որպէս զուգահեռ հատուածներ, որոնք ունեն հաւասար երկարութիւն, որը կոչուում է **գլանի բարձրութիւն**, նաև **գլանի առանցքի** հատուածը:

Գլանի կարելի է ստանալ՝ պտտելով ուղղանկիւնը մէկ շուրջ: Դիար 41-րդ պատկերում է գլան, որը ստացուում է՝ պտտելով $ABCD$ ուղղանկիւնը AB կողմի շուրջը: Այդ դէպքում գլանի կողմնային մակերեսը առաջանում է CD կողմի պտտումից, իսկ BC և AD կողմերի պտտումից՝ սահմանագծերը:

Գլանը պարփակում է գլանի հատուածը՝ իր հիմքերով միասին: Երբ հատող հարթութիւնը ուղղահայաց է գլանի առանցքին, այդ հարթութեան **շրջան է**: Բացի այդ է, որ այդպիսի հատուածը (Ղ հարթութիւնը 42, բ գկարուած) միմիայն գլանից է ձարդեց, որը ծայրերը ևս գլան է: Դրա հիմքերը երեսն շրջանագծեր են, որոնցից մեկն էլ հեռու գտնուում է հատուածից:

Առանցքային հատուած:

Երբ հատող հարթութիւնը ուղղահայաց է գլանի առանցքին, այդ հատուածը **շրջան է**: Բացի այդ է, որ այդպիսի հատուածը (Ղ հարթութիւնը 42, բ գկարուած) միմիայն գլանից է ձարդեց, որը ծայրերը ևս գլան է: Դրա հիմքերը երեսն շրջանագծեր են, որոնցից մեկն էլ հեռու գտնուում է հատուածից:



ա) Գլանը ստացվել է $ABCD$ ուղղանկիւնը AB կողմի շուրջը պտտելով

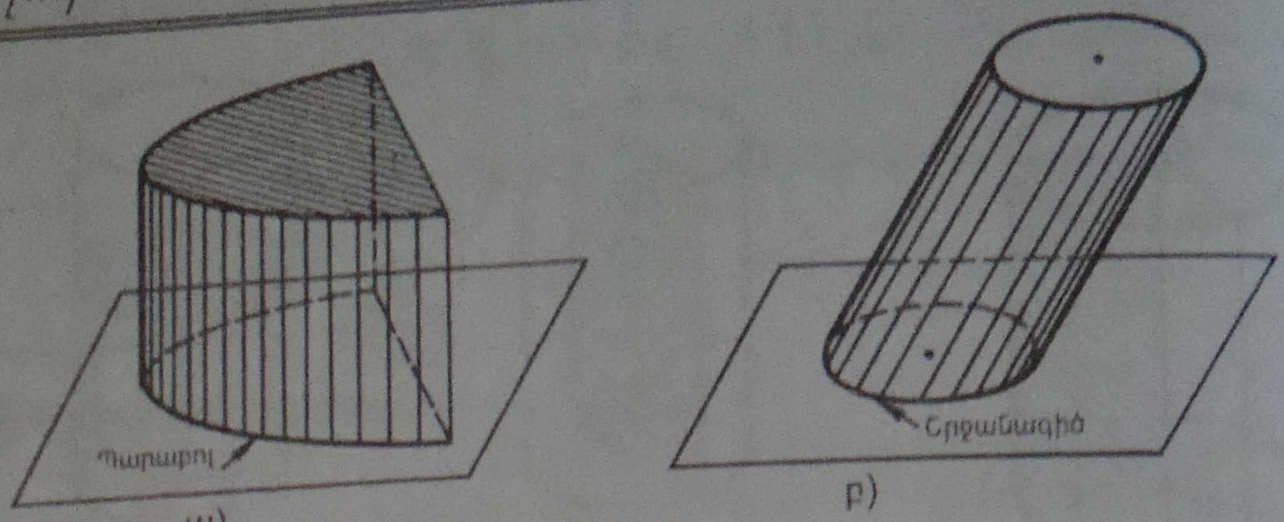
Նկ. 41

բ) Առանցքին ուղղահայաց հարթութիւնը հատուածը

Նկ. 42

Նկատենք, որ սահմանափակված է գլանային մակերևոյթով և L, L_1 շրջանագծերի եզերած երեսի շրջանակով, հետևյալ **գլան** (տե՛ս նկ.40): Գլանային մակերևոյթը եզերող **գլանի ուղղորդիչ**, իսկ շրջանագծերը եզերող **գլանի հիմքեր**: Գլանային մակերևոյթի ծնորդները **գլանի ծնորդներ**, OO_1 ուղիղը՝ **գլանի առանցք**:

Գլանի բոլոր ծնորդները զուգահեռ են և հաւասար միմեանց՝ որպէս զուգահեռ հատուածներ, որոնք ունեն հաւասար երկարութիւն: Գլանի հիմքերը շրջանագծեր են և գտնուում են զուգահեռ հարթութիւնների մէջ: Գլանի ծնորդները կոչուում են **գլանի ծնորդներ**, իսկ շրջանագծերը՝ **գլանի հիմքեր**:



ա) բ)

Նկ. 43

յուրաքանչյուր հիմքն այնպիսի պատկեր է, որ սահմանափակված է պարաբոլի մի մասով և հատվածով: 43,բ նկարում պատկերված է մի գլան, որի հիմքերը շրջաններ են, սակայն գլանի ծնորդները ուղղահայաց չեն հիմքերի հարթություններին (թեք գլան): Այսուհանդերձ, հետագայում մենք կդիտարկենք միայն այնպիսի գլաններ, որոնք սահմանվել են այս կետում: Դրանց երբեմն անվանում են **ուղիղ շրջանային գլաններ**:

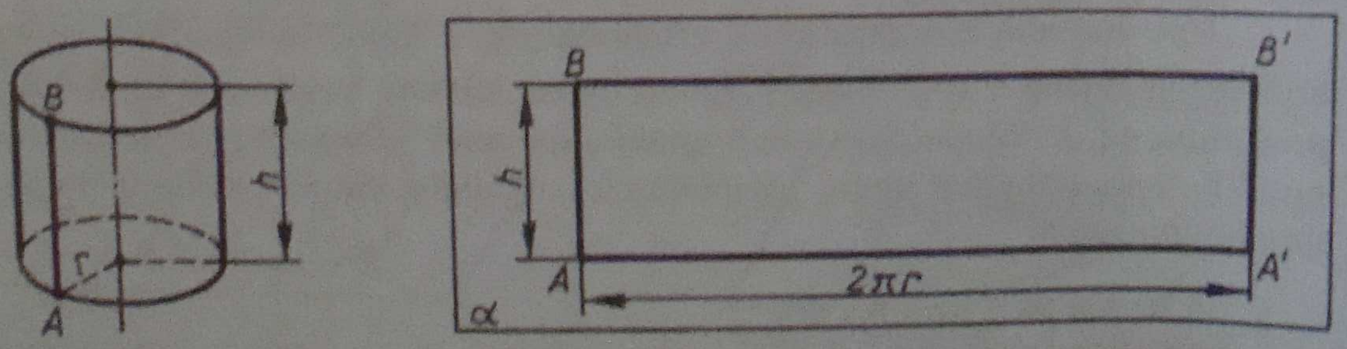
18 Գլանի մակերևույթի մակերեսը

Դիտենք 44,ա նկարում պատկերված գլանը: Պատկերացնենք, թե նրա կողմնային մակերևույթը կտրել են AB ծնորդի երկայնքով և այնուհետև այն փռել են այնպես, որ նրա բոլոր ծնորդները վերադասավորվել են մի որևէ α հարթության մեջ (նկ.44,բ): Դրա արդյունքում α հարթության մեջ ստացվում է $ABB'A'$ ուղղանկյունը: Ուղղանկյան AB և $A'B'$ կողմերը գլանի կողմնային մակերևույթի AB ծնորդի երկայնքով կտրվածքի երկու եզրերն են: Այդ ուղղանկյունը կոչվում է **գլանի կողմնային մակերևույթի փռվածք**: Ուղղանկյան AA' հիմքը գլանի հիմքի շրջանագծի փռվածքն է, իսկ AB բարձրությունը գլանի ծնորդն է: Ուրեմն՝ $AA'=2\pi r$, $AB=h$, որտեղ r-ը գլանի շառավիղն է, h-ը՝ նրա բարձրությունը:

Որպես գլանի կողմնային մակերևույթի մակերես ընդունվում է նրա փռվածքի մակերեսը:

Քանի որ $ABB'A'$ ուղղանկյան մակերեսը հավասար է $AA'\cdot AB=2\pi rh$, ապա r շառավիղով և h բարձրությամբ գլանի կողմնային մակերևույթի $S_{\text{կողմ}}$ մակերեսը հաշվելու համար ստացվում է հետևյալ բանաձևը՝

$$S_{\text{կողմ}}=2\pi rh:$$



ա) բ)

Նկ. 44

Գ-ւած է **լրիվ մակերևույթի մակերես** կոչում է նրա կողմնային մակերևույթի և երկու հիմքերի մակերեսների գումարը: Քանի որ յուրաքանչյուր հիմքի մակերես հավասար է πr^2, ապա գլանի լրիվ մակերևույթի $S_{\text{լրիվ}}$ մակերեսը հաշվելու համար առաջին է հետևյալ բանաձևը՝

$$S_{\text{լրիվ}}=2\pi r(r+h):$$

Խնդիրներ

156. Ապացուցեք, որ գլանի առանցքային հատույթեց ուղանկյուն է, որի երկու հակադիր կողմերը գլանի ծնորդներ են, իսկ մյուս երկուսը՝ գլանի հիմքերի տրամագծեր: Գ-ւած առանցքային հատույթի անկյունագիծը, երբ գլանի շառավիղը 1,5մ է, իսկ բարձրությունը՝ 4մ:

157. Գ-ւած առանցքային հատույթի անկյունագիծը 48սմ է: Նյո անկյունագիծը հիմքի ծնորդի կազմած անկյունը 60° է: Գ-ւած **w)** գլանի **p)** գլանի շառավիղը, **q)** գլանի հիմքի մակերեսը:

158. Գ-ւած առանցքային հատույթը քառակուսի է, որի անկյունագիծը 20սմ է: Գ-ւած **w)** գլանի բարձրությունը, **p)** գլանի հիմքի մակերեսը:

159. Երիտ գլանների առանցքային հատույթները հավասար են: Նրանք հավասա՞ր են այդ գլանների բարձրություններին:

160. Գ-ւած առանցքային հատույթի մակերեսը 10սմ^2 է, իսկ հիմքի մակերեսը՝ 5սմ^2: Գ-ւած գլանի բարձրությունը:

161. Գ-ւած հիմքի մակերեսը հարթության է առանցքային հատույթի մակերեսի $\sqrt{3}\pi:4$: Գ-ւած **w)** գլանի առանցքային հատույթի կողմերն ու հիմքի հարթության կազմած անկյունը, **p)** առանցքային հատույթի անկյունագծերի կազմած անկյունը:

162. AB հատվածի ծայրակետերը ընկած են գլանի հիմքերի շրջագծերի վրա: Գ-ւած շառավիղը r է, նրա բարձրությունը՝ h, իսկ AB ուղղի և գլանի առանցքի հեռավորությունը՝ d: Գ-ւած **w)** h-ը, երբ $r=10\text{սմ}$, $d=8\text{սմ}$, $AB=13\text{սմ}$, **p)** d-ն, երբ $h=6\text{սմ}$, $r=5\text{սմ}$, $AB=10\text{սմ}$:

163. Ապացուցեք, որ երբ հատող հարթությունը զուգահեռ է գլանի առանցքային հատույթի, որևէ, իսկ այդ հարթության և գլանի առանցքների հեռավորությունը փոքր է նրա շառավղից, ապա գլանի հատույթը ուղղանկյուն է, որի երկու հանդիպակաց կողմերը գլանի ծնորդներ են:

164. Գ-ւած բարձրությունը 8սմ է, շառավիղը՝ 5սմ: Գ-ւած գլանի առանցքային հարթությանը հատույթի մակերեսը, երբ այդ հարթությունը հեռացված է առանցքից 3սմ է:

165. Գ-ւած բարձրությունը 12սմ է, իսկ հիմքի շառավիղը՝ 10սմ: Գ-ւած հատած է առանցքին զուգահեռ հարթությամբ այնպես, որ հատույ-

բում ստացվել է քառակուսի: Գտեք գլանի առանցքի և հատող հարթության հեռավորությունը:

166. Գլանի բարձրությունը 10դմ է: Գլանի առանցքին զուգահեռ և նրանից 9դմ հեռավորության վրա գտնվող հարթությամբ հատույթի մակերեսը 240դմ^2 է: Գտեք գլանի շառավիղը:

167. Գլանի AA_1 ծնորդով տարված են երկու հատող հարթություններ, որոնցից մեկն անցնում է գլանի առանցքով: Գտեք գլանի այդ հարթություններով հատույթների մակերեսների հարաբերությունը, եթե հատող հարթությունների կազմած անկյունը φ է:

168. Գլանի բարձրությունը h է, իսկ առանցքային հատույթի մակերեսը S: Գտեք գլանի այն հատույթի մակերեսը, որն առաջանում է նրա առանցքին զուգահեռ և դրանից d հեռավորություն ունեցող հարթությամբ հատելիս:

169. Գլանի առանցքին զուգահեռ հարթությունը հիմքի շրջանագծից զատում է 120° աղեղ: Գտեք առաջացած հատույթի մակերեսը, եթե գլանի բարձրությունը h է, իսկ նրա առանցքի և հատող հարթության հեռավորությունը՝ d:

170. Գլանի առանցքին զուգահեռ հարթությունը հիմքի շրջանագծից զատում է 60° աղեղ: Գլանի ծնորդը $10\sqrt{3}$ սմ է, առանցքի և հատող հարթության հեռավորությունը՝ 2սմ: Գտեք հատույթի մակերեսը:

171. Գլանի ծնորդով տարված են երկու փոխուղղահայաց հարթություններ: Ստացված հատույթներից յուրաքանչյուրի մակերեսը S է: Գտեք գլանի առանցքային հատույթի մակերեսը:

172. Գլանի հիմքի տրամագիծը 1մ է, գլանի բարձրությունը հավասար է հիմքի շրջանագծի երկարությանը: Գտեք գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

173. Գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը S է: Գտեք գլանի առանցքային հատույթի մակերեսը:

174. Ինչքա՞ն ներկ է հարկավոր, որպեսզի ներկեն գլանաձև բաքը, որի հիմքի տրամագիծը 1,5մ է, բարձրությունը՝ 3մ, եթե յուրաքանչյուր քառակուսի մետրի համար ծախսվում է 200գ ներկ:

175. Գլանի բարձրությունը 12սմ-ով մեծ է նրա շառավիղից, իսկ լրիվ մակերևույթի մակերեսը 288π սմ^2 է: Գտեք գլանի բարձրությունը և հիմքի շառավիղը:

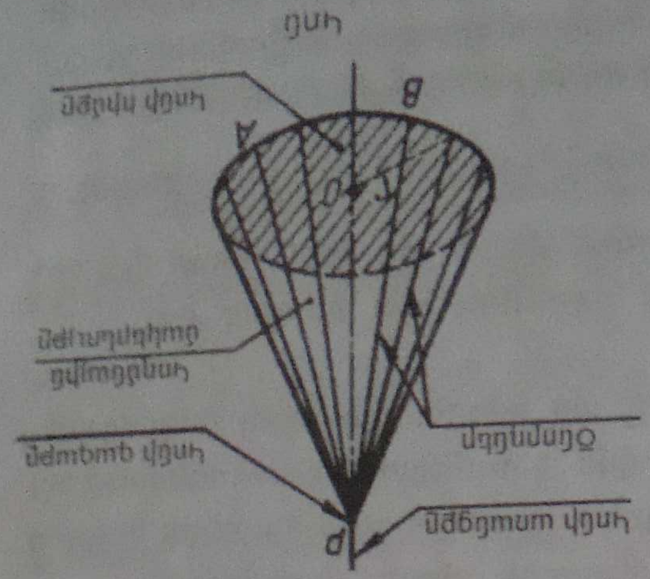
176. Քանի՞ քառակուսի մետր մետաղաթիթեղ կպահանջվի, որպեսզի պատրաստեն 4մ երկարությամբ և 20սմ տրամագծով խողովակ, եթե կարերի համար անհրաժեշտ է ավելացնել նրա կողմնային մակերևույթի մակերեսի 2,5%-ը:

177. Գլանի ծնորդի և առանցքային հատույթի անկյունագծի կազմած անկյունը φ է, գլանի հիմքի մակերեսը՝ S: Գտեք գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

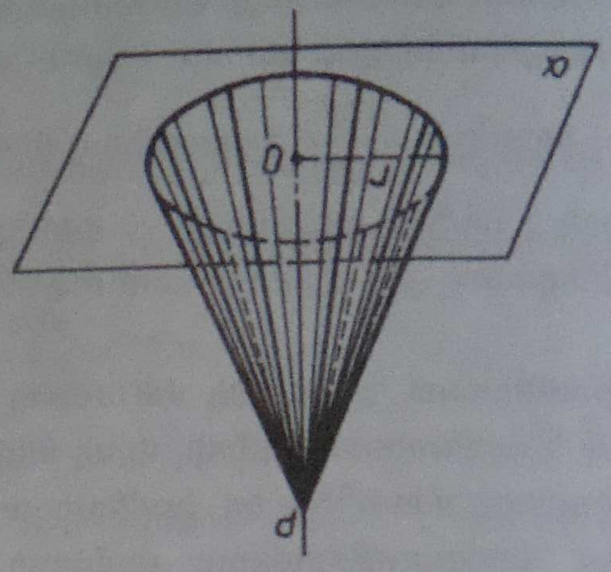
19 **Կոնի հատկացումները**

Դիտարկենք O կենտրոնով L շրջանագիծը և OP ուղիղ, որն ուղղահայաց է այդ շրջանագծի հարթությանը: Շրջանագծի յուրաքանչյուր կետը հատվածով միացնենք P կետին: Այդ հատվածների wառաջացած մակերևույթը կոչվում է **հոսքի մակերևույթ** (նկ.45), իսկ ինքը հատվածները՝ **հոսքի մակերևույթի ծնորդներ:**

Մարդկանց, որ ստանում է հոսքի մակերևույթով և L շրջանագծի եզերած շրջանով, կոչում է հոսք (նկ.46): Կոնայինի մակերևույթը կոչվում է **հոսքի կողքային մակերևույթ,** իսկ շրջանը՝ **հոսքի խոռոչ:** P կետը կոչվում է **հոսքի աղբյուր,** իսկ Q կետը՝ **հոսքի ընդունիչ:**



նկ. 46



նկ. 45

Գլուխ IV. Կոն և գունդ

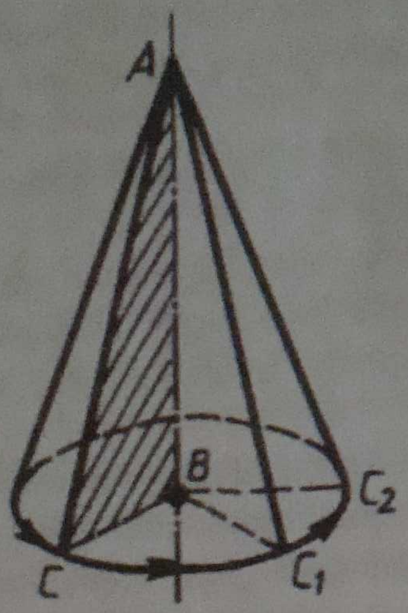
178. Գտնել կոնի մակերևույթի փոխադրի աճիյուցագծերի կազմած անկյունը φ է, աճիյուցագիծը d Գտնք գլանի կողմի երկարությունը և լրիվ մակերեսները:

179. d աճիյուցագիծ բարձրությամբ է գլանի կողմը հոսքային մակերևույթ: Գտնք այդ գլանի հիմքի մակերեսը:

180. Գլանն առաջացել է a կողմով քառակուսու իր կողերից մեկի շուրջը պտտումից: Գտնք w) գլանի առացքային հատվածի մակերեսը, բ) գլանի հոսքային մակերևույթի մակերեսը, գ) գլանի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

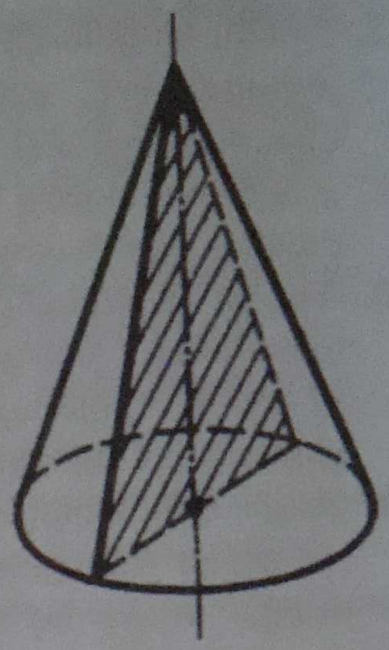
181. Երկու գլանների ընդհանուր առանցքն է $ABCD$ ուղղանկյան կողմերից AB ուղիղ շուրջը, իսկ մյուս գլանը՝ նույն ուղղանկյան BC ուղիղ շուրջը: w) Ապացուցել, որ այդ գլանների հոսքային մակերևույթների մակերեսները հավասար են: բ) Գտնք այդ գլանների լրիվ մակերևույթների հարաբերությունը, երբ $AB=a$, $BC=b$:

§2 Կոն



Կոնը ստացվել է ABC ուղղանկյուն եռանկյունը AB էջի շուրջը պտտելով

Նկ. 47



Կոնի առանցքային հատույթը

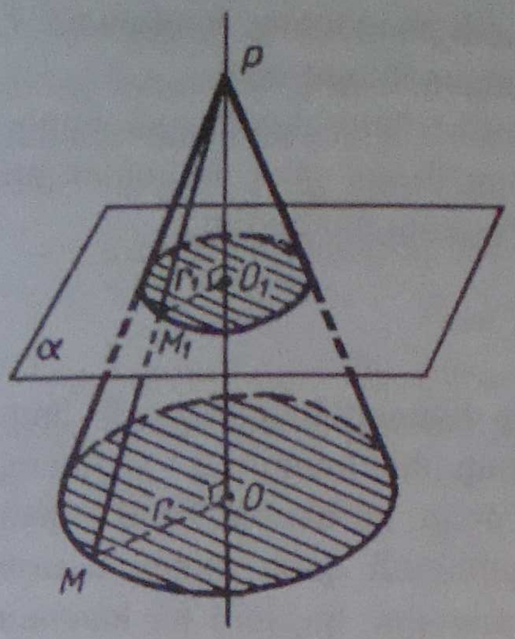
Նկ. 48

կոչվում է **կոնի գագաթ,** իսկ կոնային մակերևույթի ծնորդները կոչվում են **կոնի ծնորդները** (նկ.46-ում պատկերված են ծնորդներ PA-ն, PB-ն և այլն): Կոնի բոլոր ծնորդները միմյանց հավասար են (պարզաբանեք՝ ինչու): OP ուղիղը, որն անցնում է կոնի գագաթով և հիմքի կենտրոնով, կոչվում է **կոնի առանցք**: Կոնի առանցքն ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը: OP հատվածը կոչվում է **կոնի բարձրություն**:

Կոն կարելի է ստանալ՝ պտտելով ուղղանկյուն եռանկյունը իր էջերից մեկի շուրջը: Նկար 47-ում պատկերված է կոն, որ ստացվում է պտտելով ABC ուղղանկյուն եռանկյունը AB էջի շուրջը: Այդ դեպքում կոնի կողմնային մակերևույթն առաջանում է AC ներքնաձիգի պտտմամբ, իսկ հիմքը՝ BC էջի պտտմամբ:

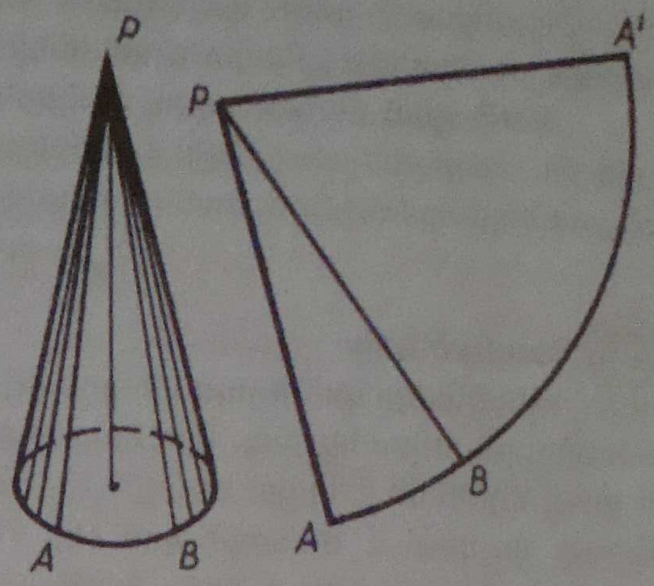
Դիտարկենք կոնի հատույթը տարբեր հարթություններով: Եթե հատող հարթությունն անցնում է կոնի առանցքով (նկ.48), ապա հատույթը հավասարասրուն եռանկյուն է, որի հիմքը կոնի հիմքի տրամագիծն է, իսկ սրունքները կոնի ծնորդներն են: Այդ հատույթը կոչվում է **առանցքային հատույթ**:

Եթե հատող հարթությունն ուղղահայաց է կոնի OP առանցքին (նկ.49), ապա կոնի հատույթը շրջան է, որի O_1 կենտրոնն ընկած է կոնի առանցքի վրա: Այդ շրջանի r_1 շառավիղը հավասար է $\frac{PO_1}{PO}r$, որտեղ r-ը կոնի հիմքի շառավիղն է. դա հեշտ է ցույց տալ՝ նկատի ունենալով POM և PO_1M_1 ուղղանկյուն եռանկյունների նմանությունը: Այդ փաստի ապացուցումը բերված է խնդիր 191-ի լուծման մեջ:



Կոնի առանցքին ուղղահայաց α հարթությամբ հատույթը շրջան է՝ O_1 կենտրոնով և r_1 շառավիղով

Նկ. 49



ա) բ)

Նկ. 50

20 Կոնի մակերևույթի մակերեսը

Կոնի կողմնային մակերևույթը, ինչպես և գլանի կողմնային մակերևույթը, կարելի է փռել հարթության վրա՝ այն կտրելով ծնորդներից մեկի երկայնքով (նկ.50,ա,բ)։ Կոնի կողմնային մակերևույթի փռվածքը շրջանային սեկտոր է (նկ.50,բ), որի շառավիղը հավասար է կոնի ծնորդին, իսկ սեկտորի աղեղի երկարությունը՝ կոնի հիմքի շրջանագծի երկարությանը։

Որպես կոնի կողմնային մակերևույթի մակերես ընդունվում է նրա փռվածքի մակերեսը։ Կոնի կողմնային մակերևույթի $S_{\text{կողմ}}$ մակերեսն արտահայտենք նրա ℓ ծնորդով և հիմքի r շառավիղով։ Շրջանային սեկտորի, այսինքն կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը (տե՛ս նկ.50,բ) հավասար է $\frac{\pi\ell^2}{360}\alpha$, որտեղ α-ն ABA' աղեղի աստիճանային չափն է։ Ուրեմն՝

$$S_{\text{կողմ}} = \frac{\pi\ell^2}{360}\alpha : \qquad (1)$$

α-ն արտահայտենք ℓ-ով և r-ով։ Քանի որ ABA' աղեղի երկարությունը $2\pi r$ է (հավասար է կոնի հիմքի շրջանագծի երկարությանը), ապա $2\pi r = \frac{\pi\ell}{180}\alpha$, որից ստացվում է, որ $\alpha = \frac{360r}{\ell}$: Այս արտահայտությունը տեղադրելով (1) բանաձևի մեջ՝ ստացվում է

$$S_{\text{կողմ}} = \pi r\ell : \qquad (2)$$

Այսպիսով **կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է հիմքի շրջանագծի երկարության կեսի և ծնորդի արտադրյալին:**

Կոնի լրիվ մակերևույթի մակերես կոչվում է նրա կողմնային մակերևույթի մակերեսի և հիմքի մակերեսի գումարը: Կոնի լրիվ մակերևույթի $S_{\text{լրիվ}}$ մակերեսը հաշվելու համար ստացվում է հետևյալ բանաձևը.

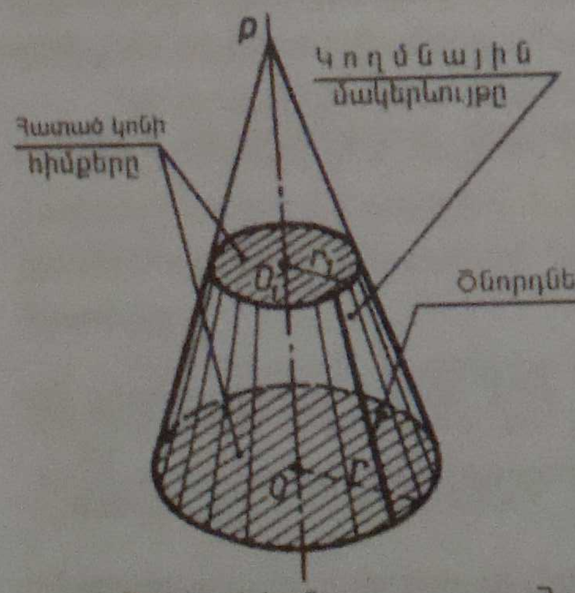
$$S_{\text{լրիվ}}=\pi r(\ell+r):$$

21 Հատած կոն

Վերցնենք կամայական կոն և տանենք հատող հարթություն՝ նրա առանցքին ուղղահայաց: Այդ հարթությունը կոնի հետ հատվում է շրջանով և կոնը տրոհում է երկու մասի: Այդ մասերից մեկը, իր հերթին, կոն է, իսկ մյուսը կոչվում է **հատած կոն** (նկ.51): Սկզբնական կոնի հիմքը և այդ շրջանը, որ ստացվել է կոնը հարթությամբ հատելիս, կոչվում են **հատած կոնի հիմքեր**: Հիմքերի կենտրոնները միացնող հատվածը կոչվում է **հատած կոնի բարձրություն**: Կոնային մակերևույթի այն մասը, որը սահմանափակում է հատած կոնը, կոչվում է նրա **կողմնային մակերևույթ**: Կոնային մակերևույթի ծնորդների այն հատվածները, որոնք առնված են հիմքերի միջև, կոչվում են հատած կոնի **ծնորդներ**: Հատած կոնի բոլոր ծնորդները միմյանց հավասար են (դա ապացուցեք ինքնուրույն):

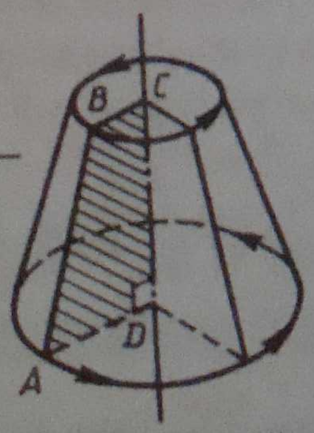
Հատած կոն կարելի է ստանալ՝ պտտելով ուղղանկյուն սեղանը իր այն կողմի շուրջը, որն ուղղահայաց է հիմքերին: Նկար 52-ում պատկերված է հատած կոն, որն ստացվում է՝ պտտելով $ABCD$ ուղղանկյուն սեղանը CD կողմի շուրջը: Այդ դեպքում կողմնային մակերևույթն առաջանում է սեղանի AB սրունքի պտտմամբ, իսկ սեղանի CB և DA հիմքերի պտտմամբ առաջանում են հատած կոնի հիմքերը:

Հատած կոնի կողմնային մակերևույթի $S_{\text{կողմ}}$ մակերեսն արտահայտենք նրա ℓ ծնորդով և հիմքերի r, r_1 շառավիղներով ($r>r_1$):



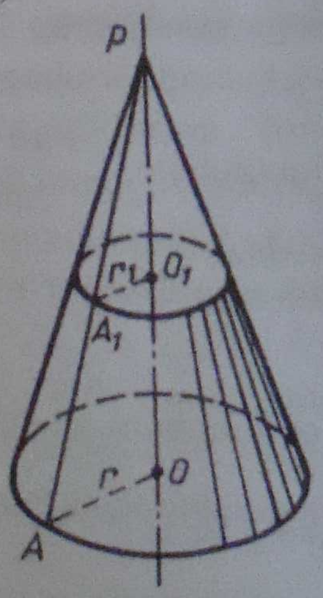
Հատած կոն

Նկ. 51



Հատած կոնը ստացվել է ABCD ուղղանկյուն սեղանը CD կողմի շուրջը պտտելով

Նկ. 52



Նկ. 53

Դիցուք P-ն այն կոնի գագաթն է, որից ստացվել է հատած կոնը, AA_1-ը հատած կոնի ծնորդներից մեկն է, O և O_1 կետերը նրա հիմքերի կենտրոններն են (նկ.53): Օգտագործելով (2) բանաձևը՝ ստանում ենք.

$$S_{\text{կողմ}}=\pi r\cdot PA-\pi r_1\cdot PA_1=\pi r(PA_1+AA_1)-\pi r_1\cdot PA_1:$$

Հաշվի առնելով, որ $AA_1=\ell$, գտնում ենք

$$S_{\text{կողմ}}=\pi r\ell+\pi(r-r_1)PA_1: \qquad (3)$$

PA_1-ը արտահայտենք ℓ-ով, r-ով և r_1-ով: Նկատենք, որ PO_1A_1 և POA ուղղանկյուն եռանկյունները նման են, քանի որ ունեն ընդհանուր սուր անկյուն՝ $\angle P$-ն: Ուրեմն $\frac{PA_1}{PA}=\frac{r_1}{r}$, կամ՝ $\frac{PA_1}{PA_1+\ell}=\frac{r_1}{r}$, որից ստացվում է

$$PA_1=\frac{\ell r_1}{r-r_1}:$$

Այս արտահայտությունը տեղադրելով (3) բանաձևի մեջ՝ հանգում ենք հետևյալ բանաձևին.

$$S_{\text{կողմ}}=\pi(r+r_1)\ell:$$

Այսպիսով՝ **հատած կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է հիմքերի շրջանագծերի երկարությունների կիսագումարի և ծնորդի արտադրյալին:**

Խնդիրներ

182. Կոնի բարձրությունը 15սմ է, իսկ հիմքի շառավիղը՝ 8սմ: Գտեք կոնի ծնորդը:

183. Կոնի ծնորդը 12սմ է և հիմքի հարթությանը թեքված է α անկյան տակ: Գտեք կոնի հիմքի մակերեսը, եթե. **ա)** $\alpha=30°$, **բ)** $\alpha=45°$, **գ)** $\alpha=60°$:

184. Կոնի բարձրությունը 8դմ է: Կոնի գագաթից ի՞նչ հեռավորությամբ պետք է տանել հիմքին զուգահեռ հարթությունը, որպեսզի հատույթի մակերեսը հավասար լինի՝ **ա)** հիմքի մակերեսի կեսին, **բ)** հիմքի մակերեսի քառորդին:

185. Կոնի առանցքային հատույթը ուղղանկյուն եռանկյուն է: Գտեք այդ հատույթի մակերեսը, եթե կոնի հիմքի շառավիղը 5սմ է:

186. Կոնի առանցքային հատույթը կանոնավոր եռանկյուն է՝ $2r$ կողմով: Գտեք կոնի երկու ծնորդներով տարված հատույթի մակերեսը, եթե այդ ծնորդների կազմած անկյունը հավասար է. **ա)** $30°$, **բ)** $45°$, **գ)** $60°$:

187. Կոնի բարձրությունը h է, իսկ բարձրության և ծնորդի կազմած անկյունը $60°$ է: Գտեք կոնի այն հատույթի մակերեսը, որն առաջանում է երկու փոխուղղահայաց ծնորդներով անցնող հարթությամբ:

188. Գտեք կոնի բարձրությունը, եթե նրա առանցքային հատույթի մակերեսը 6դմ^2 է, իսկ հիմքի մակերեսը՝ 8դմ^2:

189. Կոնի ծնորդը ℓ է, իսկ հիմքի շառավիղը՝ r: Գտեք այն հատույթի մակերեսը, որն անցնում է կոնի գագաթով և հիմքի այն լարով, որի ծգած աղեղն է. ա) $60°$, բ) $90°$:

190. Կոնի բարձրությունը 10սմ է: Հատույթն անցնում է կոնի գագաթով և հիմքի լարով, որը ծգում է $60°$-ի աղեղ: Գտեք այդ հատույթի մակերեսը, եթե հատույթի հարթությունը կոնի հիմքի հարթության հետ կազմում է հետևյալ անկյունը. ա) $30°$, բ) $45°$, գ) $60°$:

191. P գագաթով կոնի հիմքը O կենտրոնով և r շառավիղով շրջան է: Ապացուցեք, որ եթե α հատող հարթությունն ուղղահայաց է կոնի առանցքին, ապա կոնի հատույթը O_1 կենտրոնով և r_1 շառավիղով շրջան է, որտեղ O_1-ը α հարթության և PO առանցքի հատման կետն է, իսկ $r_1 = \dfrac{PO_1}{PO} r$ (տե՛ս նկ.49):

Լուծում: Նախ ապացուցենք, որ α հարթության մեջ O_1 կենտրոնով և r_1 շառավիղով շրջանագծի վրա ընկած կամայական M_1 կետն ընկած է նաև կոնի մի որևէ ծնորդի վրա, այսինքն՝ դիտարկվող հատույթի կետ է: PM_1 ճառագայթի և կոնի հիմքի հարթության հատման կետը նշանակենք M տառով: PO_1M_1 և POM ուղղանկյուն եռանկյունների նմանությունից (դրանք նման են, որովհետև ունեն ընդհանուր սուր անկյուն՝ P-ն) գտնում ենք. $OM = \dfrac{PO}{PO_1} \cdot O_1M_1 = \dfrac{PO}{PO_1} r_1 = r$, այսինքն՝ M կետն ընկած է կոնի հիմքի շրջանագծի վրա: Հետևաբար՝ PM հատվածը, որի վրա է ընկած M_1 կետը, կոնի ծնորդ է:

Այժմ ապացուցենք, որ ցանկացած M_1 կետ, որն ընկած է և α հարթության, և՛ կոնի կողմնային մակերևույթի վրա, ընկած է նաև r_1 շառավիղով և O_1 կենտրոնով շրջանագծի վրա: Իսկապես, PO_1M_1 և POM եռանկյունների նմանությունից (PM-ը ծնորդ է, որն անցնում է M_1 կետով) ունենք $O_1M_1 = \dfrac{PO_1}{PO} \cdot OM = \dfrac{PO_1}{PO} r = r_1$: Այսպիսով՝ O_1 կենտրոնով և r_1 շառավիղով շրջանագիծը կոնի կողմնային մակերևույթի հատույթն է α հարթությամբ: Ուրեմն՝ այդ շրջանագծով եզերված շրջանը կոնի հատույթն է α հարթությամբ:

192. Կոնը հատում են նրա առանցքին ուղղահայաց երկու հարթություններ: Ապացուցեք, որ կոնի՝ այդ հարթություններով հատույթների մակերեսները հարաբերում են, ինչպես կոնի գագաթից այդ հարթությունների հեռավորությունների քառակուսիները:

193. Կոնի կողմնային մակերևույթի փռվածքը α աղեղով սեկտոր է: Գտեք α-ն, եթե կոնի բարձրությունը 4սմ է, իսկ հիմքի շառավիղը 3սմ:

194. Գտեք կոնի կողմնային մակերևույթի փռվածք հանդիսացող սեկտորի աղեղը, եթե կոնի ծնորդը հիմքի հարթության հետ կազմում է $60°$ անկյուն:

195. Գտեք հոգի աաանցքային հատույթի զագարի աճկյունը, եթե նրա կողմերից մեկինության փոխադիր սեկտոր է, որի աղեղի է. **ա)** 180°, **բ)** 90°, **գ)** 60°:

196. Հաշիվ հոգի հիմքի մեկնկոնը և բարձրությունը, եթե նրա կողմերից մեկինության փոխադիր սեկտոր է, որի շառավիղը 9սմ է, իսկ աղեղի աղեղը 120°:

197. Կոնի աաանցքի և ծորդի կազմած աճկյունը 45° է, ծորդը 6,5սմ: Գտեք հոգի կողմերից մեկինության մեկնկոնը:

198. Կոնի աաանցքային հատույթի մեկնկոնը 0,6սմ² է, կոնի բարձրությունը 1,2սմ: Հաշիվ հոգի լրիվ մեկնկոնության մեկնկոնը:

199. Կոնի ծորդը հիմքի հարթությանը բեքված է փ աճկյան տակ: Կոնի հիմքին ներգծած է կանոնավոր եռանկյուն, որի մի կողմը *ա* է, իսկ դրա հանդիպակաց աճկյունը *α*: Գտեք կոնի լրիվ մեկնկոնության մեկնկոնը:

200. 6սմ և 8սմ էջերով ուղղանկյուն կտրատույթ է փոքր էջի շուրջը: Գտեք այդ պտտության առաջացած կոնի կողմերից և լրիվ մեկնկոնությունների մեկնկոնները:

201. Հավասարասրուն եռանկյունը, որի սրունքը *m* է, իսկ հիմքին առընթեր աճկյունը՝ φ, պտտության է հիմքի շուրջը: Գտեք եռանկյան պտտության մարմնի մեկնկոնության մեկնկոնը:

202. Գտեք այն հատած կոնի ծորդը, որի հիմքերի շառավիղները 3սմ և 6սմ են, իսկ բարձրությունը 4սմ է:

§3 Գնդային մակերևույթ

22 **Գնդային մակերևույթ և գունդ**

Մակերևույթը, որը կազմված է տարածության այն բոլոր կետերից, որոնք գտնվում են տրված կետից տրված հեռավորության վրա, կոչվում է գնդային մակերևույթ* (նկ.54):

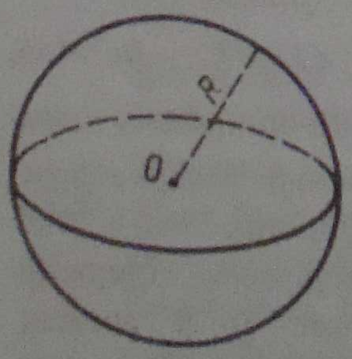
Տրված կետը կոչվում է **գնդային մակերևույթի կենտրոն** (O կետը նկար 54-ում), իսկ տրված հեռավորությունը՝ **գնդային մակերևույթի շառավիղ** (շառավիղը հաճախ նշանակում են R տառով):

Ցանկացած հատված, որը միացնում է գնդային մակերևույթի որևէ կետը և կենտրոնը, նույնպես կոչվում է գնդային մակերևույթի շառավիղ: Գնդային մակերևույթի երկու կետերը միացնող և նրա կենտրոնով անցնող հատվածը կոչվում է **գնդային մակերևույթի տրամագիծ**: Ակնհայտ է, որ գնդային մակերևույթի տրամագիծը $2R$ է: Նշենք, որ գնդային մակերևույթ կարելի է ստանալ՝ պտտելով կիսաշրջանագիծը իր տրամագծի շուրջը (նկ.55):

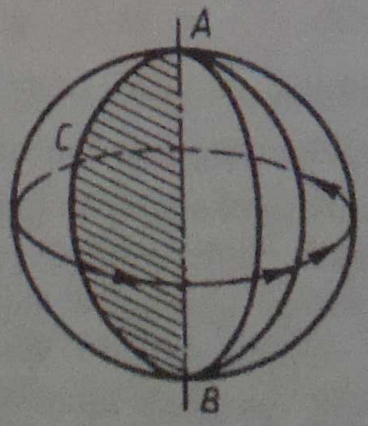
Գնդային մակերևույթով պարփակված մարմինը կոչվում է **գունդ**: Գնդային մակերևույթի կենտրոնը, շառավիղը և տրամագիծը կոչվում են նաև **գնդի կենտրոն, շառավիղ և տրամագիծ**: Ակներև է, որ O կենտրոնով և R շառավիղով գունդն ընդգրկում է տարածության այն բոլոր կետերը, որոնց հեռավորությունն O կետից չի գերազանցում R-ը (ներառյալ նաև O կետը), և այլ կետեր չի ընդգրկում:

23 **Գնդային մակերևույթի հավասարումը**

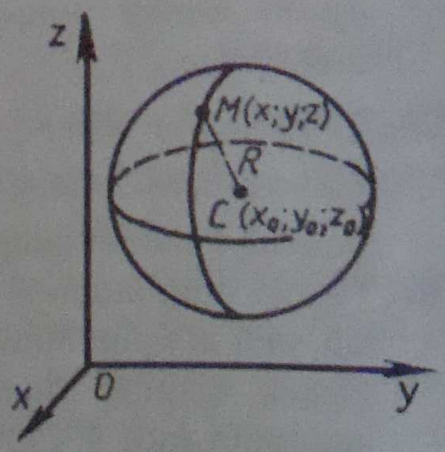
Դիցուք՝ ներմուծված է $Oxyz$ ուղղանկյուն կոորդինատների համակարգ, և տրված է որևէ F մակերևույթ, օրինակ՝ հարթություն կամ գնդային մակերևույթ: x, y, z երեք փոփոխականով հավասարումը կոչվում է **F մակերևույթի հավասարում**, եթե F մակերևույթի ցանկացած կետի կոորդինատները բավարարում են այդ հավասարմանը, իսկ այդ մակերևույթի վրա չընկած ոչ մի կետի կոորդինատները տվյալ հավասարմանը չեն



Նկ. 54



Նկ. 55



Նկ. 56

* Երբեմն օգտագործվում է *գնդոլորտ*, իսկ երբեմն նաև *գնդերես* անվանումը:

րանիարտություն: Հարթության վրա զծի հավասարումը սահմանում է նաև այնպիսի հավասարումը, կարելի է ասել, հատվածում է պրած մասի կետերի հավասարումների համախմբությունը: Ընդունենք R շառավղով և $C(x_0;y_0;z_0)$ կենտրոնով գնդային մակերևույթի հավասարումը (նկ.56):

Դիտարկենք $M(x;\ y;\ z)$ կետի հեռավորությունը C կետից. հաշվում են ըստ հետևյալ բանաձևի.

$$MC=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\ :$$

Երբ $M(x;\ y;\ z)$ կետը ընկած է գնդային մակերևույթի վրա, ապա $MC=R$, կամ՝ $MC^2=R^2$, այսինքն M կետի koորդինատները բավարարում են հետևյալ հավասարմանը.

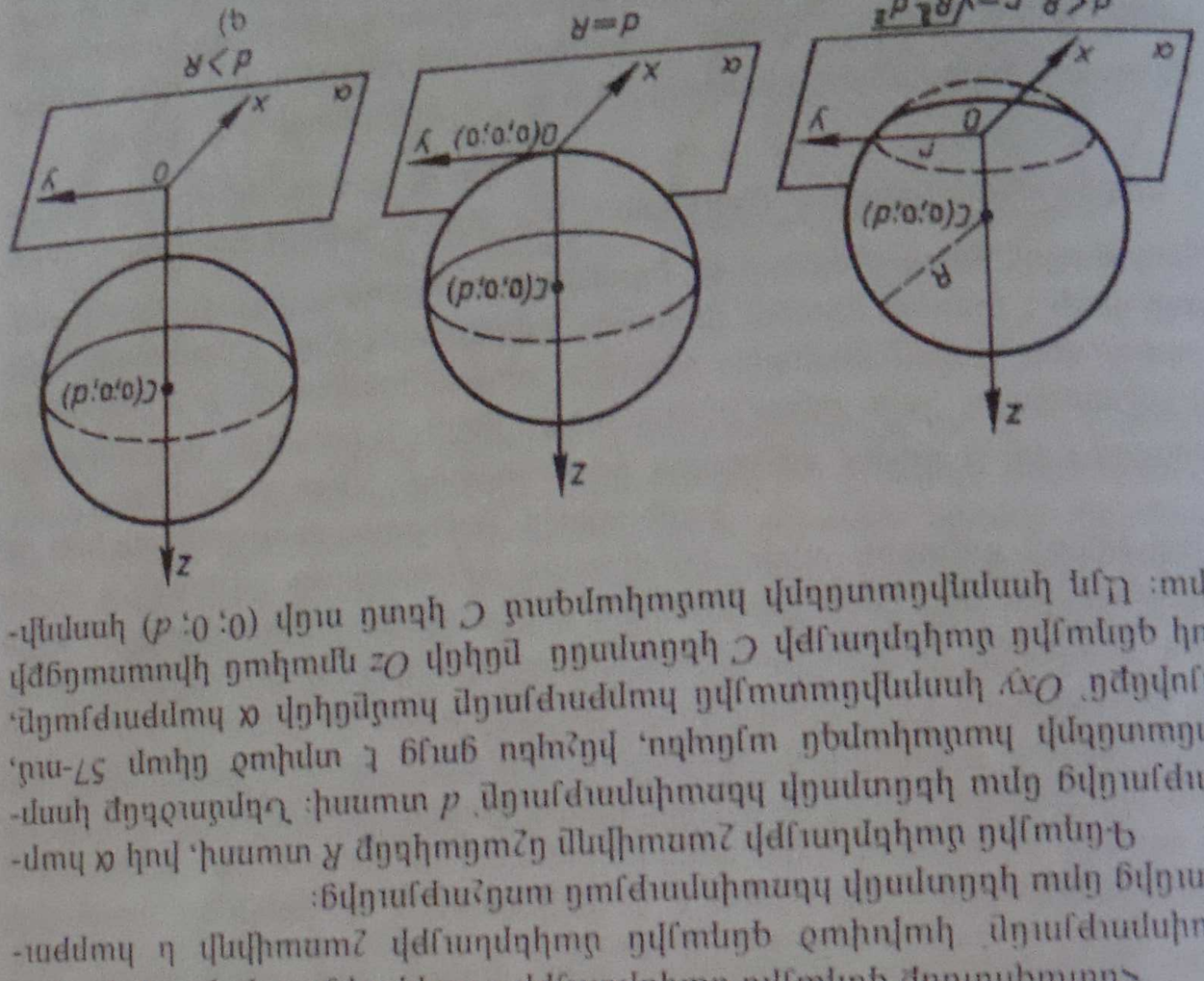
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2; \qquad (1)$$

Երբ M կետն ընկած չէ գնդային մակերևույթի վրա, ապա $MC^2\neq R^2$ և, որեմն, M կետի koորդինատները (1) հավասարմանը չեն բավարարում:

Հետևաբար՝ **koորդինատների որոնումից հատկանշական R շառավղով և $C(x_0;y_0;z_0)$ կենտրոնով գնդային մակերևույթի հավասարումն է** $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ **տեսքը:**

24 Գնդային մակերևույթի և հարթության փոխադարձ դասավորությունը

Հետազոտենք գնդային մակերևույթի և հարթության փոխադարձ դասավորության հարցը: Ենթադրենք գնդային մակերևույթի կենտրոնից հարթությանը տարված d հեռավորությունը հավասար է գնդի R շառավղին (նկ.57, ա): Նշանակենք հարթության և գնդային մակերևույթի ընդհանուր կետերի բազմությունը α տառով: Ապացուցենք, որ α բազմությունը շրջանագիծ է:



ճատները. հետևաբար՝ գնդային մակերևույթն ունի $x^2+y^2+(z-d)^2=R^2$ հավասարումը: α հարթությունը համընկնում է կոորդինատային Oxy հարթությանը և, որեմն, նրա հավասարումն ունի $z=0$ տեսքը (պարզաբանեք ինչու):

Եթե որևէ $M(x;y;z)$ կետի կոորդինատները բավարարում են այդ երկու հավասարումներին, ապա M կետն ընկած է ինչպես գնդային մակերևույթի, այնպես էլ α հարթության վրա, այսինքն՝ հարթության և գնդային մակերևույթի ընդհանուր կետ է: Իսկ եթե այդ երկու հավասարումների համակարգը լուծումներ չունի, ապա հարթությունը և գնդային մակերևույթն ընդհանուր կետեր չունեն: Այսպիսով՝ գնդային մակերևույթի և հարթության փոխդասավորության հարցը հանգում է հետևյալ հավասարումների համակարգի հետազոտմանը.

$$\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2+(z-d)^2=R^2 : \end{cases}$$

Երկրորդ հավասարման մեջ տեղադրելով $z=0$, կստանանք

$$x^2+y^2=R^2-d^2: \qquad (2)$$

Հնարավոր է երեք դեպք:

1) $d<R$: Այս դեպքում $R^2-d^2>0$, և (2) հավասարումը ներկայացնում է Oxy հարթության մեջ ընկած այն շրջանագծի հավասարումը, որի կենտրոնը O կետն է, և շառավիղն է $r=\sqrt{R^2-d^2}$: Այդ շրջանագծի ցանկացած $M(x;y;0)$ կետի կոորդինատները բավարարում են ինչպես α հարթության, այնպես էլ գնդային մակերևույթի հավասարմանը, այսինքն՝ այդ շրջանագծի բոլոր կետերը հարթության և գնդային մակերևույթի ընդհանուր կետերն են (տե՛ս նկ.57,ա): Ուրեմն՝ գնդային մակերևույթն ու հարթությունը, տվյալ դեպքում, հատվում են շրջանագծով: Այսպիսով՝ **եթե գնդային մակերևույթի կենտրոնի և հարթության միջև հեռավորությունը փոքր է գնդային մակերևույթի շառավիղից, ապա գնդային մակերևույթի՝ այդ հարթությամբ հատույթը շրջանագիծ է:**

Պարզ է, որ **գնդի՝ հարթությամբ հատույթը շրջան է:** Եթե հատող հարթությունն անցնում է գնդի կենտրոնով, ապա $d=0$, և հատույթում ստացվում է R շառավիղով շրջան, այսինքն՝ այնպիսի շրջան, որի շառավիղը հավասար է գնդի շառավիղին: Այդպիսի շրջանը կոչվում է **գնդի մեծ շրջան** (նկ.58): Եթե հատող հարթությունը չի անցնում գնդի կենտրոնով, ապա $d>0$, և հատույթի $r=\sqrt{R^2-d^2}$ շառավիղը, ակնհայտորեն, փոքր է գնդի շառավիղից (տե՛ս նկ.57,ա):

2) $d=R$: Այս դեպքում $R^2-d^2=0$, և (2) հավասարմանը բավարարում են միայն $x=0$, $y=0$ արժեքները: Հետևաբար՝ միայն $O(0;0;0)$ կետի կոորդինատներն են, որ երկու հավասարումներին էլ բավարարում են, այսինքն՝ O-ն գնդային մակերևույթի և հարթության միակ ընդհանուր կետն է (տե՛ս նկ.57,բ): Այսպիսով՝ **եթե գնդային մակերևույթի կենտրոնի և հարթության**

միջև հեռավորությունը հավասար է գնդային մակերևույթի շառավիղին, ապա գնդային մակերևույթն ու հարթությունն ունեն միայն մեկ ընդհանուր կետ:

3) $d>R$: Այս դեպքում $R^2-d^2<0$, և (2) հավասարմանը ոչ մի կետի կոորդինատներ չեն բավարարում: Հետևաբար՝ **եթե գնդային մակերևույթի կենտրոնի և հարթության միջև հեռավորությունը մեծ է գնդային մակերևույթի շառավիղից, ապա գնդային մակերևույթն ու հարթությունը ընդհանուր կետեր չունեն** (տե՛ս նկ.57,գ):

25 Գնդային մակերևույթի շոշափող հարթությունը

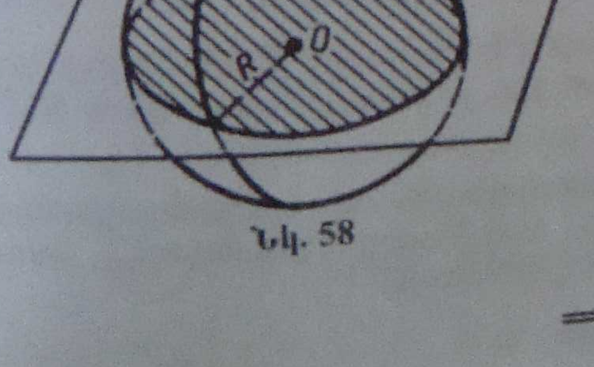
Հանգամանորեն դիտարկենք այն դեպքը, երբ գնդային մակերևույթն ու հարթությունն ունեն միայն մեկ ընդհանուր կետ: Հարթությունը, որը գնդային մակերևույթի հետ ունի միայն մեկ ընդհանուր կետ, կոչվում է **գնդային մակերևույթի շոշափող հարթություն,** իսկ ընդհանուր կետը կոչվում է հարթության և գնդային մակերևույթի **շոշափման կետ:**

Նկար 59-ում α հարթությունը O կենտրոնով գնդային մակերևույթի շոշափող հարթություն է, շոշափման կետը A-ն է: Գնդային մակերևույթի շոշափող հարթությունն օժտված է հատկությամբ, որը համանման է շրջանագծի շոշափողի հատկությանը: Դա արտահայտվում է հետևյալ թեորեմով.

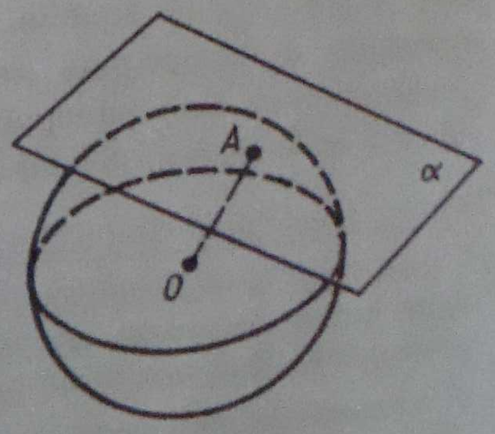
Թեորեմ: ***Գնդային մակերևույթի շառավիղը, որը տարված է գնդային մակերևույթի և հարթության շոշափման կետին, ուղղահայաց է շոշափող հարթությանը:***

Ապացուցում: Դիտարկենք α հարթությունը, որն A կետում շոշափում է O կենտրոնով գնդային մակերևույթը (նկ.59): Ապացուցենք, որ OA շառավիղն ուղղահայաց է α հարթությանը:

Ենթադրենք, թե դա այդպես չէ: Այդ դեպքում OA շառավիղը α հարթությանը տարված թեք է և, հետևաբար, գնդային մակերևույթի կենտրոնի և α հարթության հեռավորությունը փոքր է գնդային մակերևույթի շառավիղից: Ուրեմն՝ գնդային մակերևույթը և α հարթությունը հատվում են շրջանագծով: Սակայն դա հակասում է այն բանին, որ α-ն շոշափող հարթություն է, չէ՞ որ α հարթությունն ու գնդային մակերևույթն ունեն միայն



Նկ. 58



Նկ. 59

մեկ ընդհանուր կետ: Ստացված հակասությունից եզրակացնում ենք, որ OA շառավիղն ուղղահայաց է α հարթությանը:

Թեորեմն ապացուցված է:

Ապացուցենք հակադարձ թեորեմը:

Թեորեմ: ***Եթե գնդային մակերևույթի շառավիղն ուղղահայաց է իր այդ մակերևույթի վրա ընկած ծայրակետով անցնող հարթությանը, ապա այդ հարթությունը գնդային մակերևույթի շոշափող է:***

Ապացուցում: Թեորեմի պայմանից հետևում է, որ տրված շառավիղը տրված հարթության այն ուղղահայացն է, որը տարված է գնդային մակերևույթի կենտրոնից: Ուրեմն գնդային մակերևույթի կենտրոնի և հարթության հեռավորությունը հավասար է գնդային մակերևույթի շառավիղին: Հետևաբար գնդային մակերևույթն ու հարթությունն ունեն միայն մեկ ընդհանուր կետ: Դա էլ հենց նշանակում է, որ տրված հարթությունը գնդային մակերևույթի շոշափող հարթությունն է: Թեորեմն ապացուցված է:

26 Գնդային մակերևույթի մակերեսը

Գնդային մակերևույթը, ի տարբերություն գլանի կամ կոնի կողմնային մակերևույթի, հնարավոր չէ փռել հարթության վրա: Հետևաբար՝ մակերևույթի մակերեսը փռվածքի միջոցով սահմանելու և հաշվելու եղանակը նրա համար պիտանի չէ: Գնդային մակերևույթի մակերեսը սահմանելու համար օգտվենք արտագծյալ բազմանիստի հասկացությունից:

Բազմանիստը կոչվում է **գնդային մակերևույթին (գնդին) արտագծած,** եթե նրա բոլոր նիստերը շոշափում են գնդային մակերևույթը*: Այս դեպքում գնդային մակերևույթը կոչվում է **բազմանիստին ներգծած**: Նկար 60-ում պատկերված են գնդային մակերևույթին արտագծած քառանիստ և խորանարդ:

Դիցուք գնդային մակերևույթին արտագծած բազմանիստն ունի n նիստ: Նիստերի n թիվը անսահմանափակ կերպով մեծացնենք այնպես, որ արտագծած բազմանիստերի յուրաքանչյուր նիստի առավելագույն չափսը** ձգտի զրոյի: **Որպես գնդային մակերևույթի մակերես ընդունենք գնդային մակերևույթին արտագծած բազմանիստերի մակերևույթների մակերեսների հաջորդականության սահմանը, երբ նրանց յուրաքանչյուր նիստի առավելագույն չափսը ձգտում է զրոյի:** Հետագայում մենք կապա-

---

* Ասում են, որ բազմանիստի նիստը շոշափում է գնդային մակերևույթը, եթե նիստի հարթությունը գնդային մակերևույթի շոշափող հարթություն է, և շոշափման կետը պատկանում է նիստին:

** Նիստի առավելագույն չափս մենք անվանում ենք նիստի երկու կետերի հեռավորությունների մեծագույնը: Օրինակ, եթե նիստը ուղղանկյուն է, ապա նրա առավելագույն չափսը հավասար է անկյունագծին:

մեկ ընդհանուր կետ: Ստացված հակասությունից եզրակացնում ենք, որ OA շառավիղն ուղղահայաց է α հարթությանը:

Թեորեմն ապացուցված է:

Ապացուցենք հակադարձ թեորեմը:

Թեորեմ: ***Եթե գնդային մակերևույթի շառավիղն ուղղահայաց է իր այդ մակերևույթի վրա ընկած ծայրակետով անցնող հարթությանը, ապա այդ հարթությունը գնդային մակերևույթի շոշափող է:***

Ապացուցում: Թեորեմի պայմանից հետևում է, որ տրված շառավիղը տրված հարթության այն ուղղահայացն է, որը տարված է գնդային մակերևույթի կենտրոնից: Ուրեմն գնդային մակերևույթի կենտրոնի և հարթության հեռավորությունը հավասար է գնդային մակերևույթի շառավիղին: Հետևաբար գնդային մակերևույթն ու հարթությունն ունեն միայն մեկ ընդհանուր կետ: Դա էլ հենց նշանակում է, որ տրված հարթությունը գնդային մակերևույթի շոշափող հարթությունն է: Թեորեմն ապացուցված է:

26 Գնդային մակերևույթի մակերեսը

Գնդային մակերևույթը, ի տարբերություն գլանի կամ կոնի կողմնային մակերևույթի, հնարավոր չէ փռել հարթության վրա: Հետևաբար՝ մակերևույթի մակերեսը փռվածքի միջոցով սահմանելու և հաշվելու եղանակը նրա համար պիտանի չէ: Գնդային մակերևույթի մակերեսը սահմանելու համար օգտվենք արտագծյալ բազմանիստի հասկացությունից:

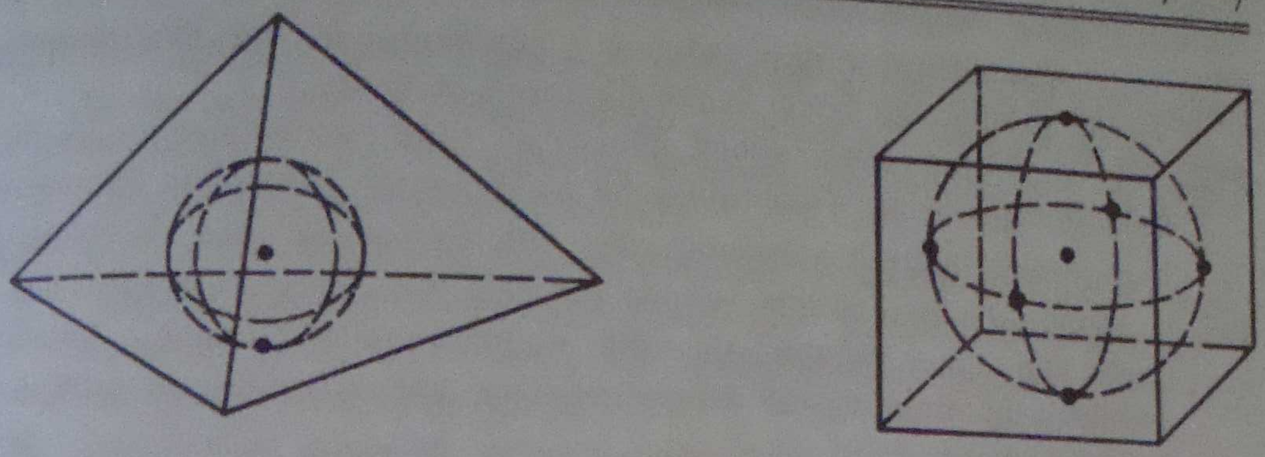
Բազմանիստը կոչվում է **գնդային մակերևույթին (գնդին) արտագծած**, եթե նրա բոլոր նիստերը շոշափում են գնդային մակերևույթը*: Այս դեպքում գնդային մակերևույթը կոչվում է **բազմանիստին ներգծած**: Նկար 60-ում պատկերված են գնդային մակերևույթին արտագծած քառանիստ և խորանարդ:

Դիցուք՝ գնդային մակերևույթին արտագծած բազմանիստն ունի n նիստ: Նիստերի n թիվը անսահմանափակ կերպով մեծացնենք այնպես, որ արտագծած բազմանիստերի յուրաքանչյուր նիստի առավելագույն չափը** ձգտի զրոյի: **Որպես գնդային մակերևույթի մակերես ընդունենք գնդային մակերևույթին արտագծած բազմանիստերի մակերևույթների մակերեսների հաջորդականության սահմանը, երբ նրանց յուրաքանչյուր նիստի առավելագույն չափը ձգտում է զրոյի**: Հետագայում մենք կապա-

---

* Ասում են, որ բազմանիստի նիստը շոշափում է գնդային մակերևույթը, եթե նիստի հարթությունը գնդային մակերևույթի շոշափող հարթություն է, և շոշափման կետը պատկանում է նիստին:

** Նիստի առավելագույն չափ մենք անվանում ենք նիստի երկու կետերի հեռավորությունների մեծագույնը: Օրինակ, եթե նիստը ուղղանկյուն է, ապա նրա առավելագույն չափը հավասար է անկյունագծին:



Նկ. 60

ցուցենք, որ այդ սահմանը գոյություն ունի, և R շառավիղով գնդային մակերևույթի մակերեսը հաշվելու համար կստանանք հետևյալ բանաձևը.

$$S=4\pi R^2:$$

Խնդիրներ

208. A և B կետերն ընկած են O կենտրոնով ($O\notin AB$) գնդային մակերևույթի վրա, իսկ M կետն ընկած է AB հատվածի վրա: Ապացուցեք, որ. **ա)** եթե M-ը AB հատվածի միջնակետն է, ապա $OM\perp AB$, **բ)** եթե $OM\perp AB$, ապա M-ը AB հատվածի միջնակետն է:

209. M կետը AB հատվածի միջնակետն է, իսկ այդ հատվածի ծայրակետերն ընկած են R շառավիղով և O կենտրոնով գնդային մակերևույթի վրա: Գտեք. **ա)** OM-ը, եթե R=50սմ, AB=40սմ, **բ)** OM-ը, եթե R=15մմ, AB=18մմ, **գ)** AB-ն, եթե R=10դմ, OM=60սմ, **դ)** AM-ը, եթե $R=a$, $OM=b$:

210. A և B կետերն ընկած են R շառավիղով գնդային մակերևույթի վրա: Գտեք գնդային մակերևույթի կենտրոնի հեռավորությունը AB ուղղից, եթե $AB=m$:

211. Գրեք R շառավիղով և A կենտրոնով գնդային մակերևույթի հավասարումը, եթե **ա)** $A(2;-4;7)$, $R=3$, **բ)** $A(0;0;0)$, $R=\sqrt{2}$, **գ)** $A(2;0;0)$, $R=4$:

212. Գրեք A կենտրոնով այն գնդային մակերևույթի հավասարումը, որն անցնում է N կետով, եթե. **ա)** $A(-2;2;0)$, $N(5;0;-1)$, **բ)** $A(-2;2;0)$, $N(0;0;0)$, **գ)** $A(0;0;0)$, $N(5;3;1)$:

213. Գտեք այն գնդային մակերևույթի շառավիղը և կենտրոնի կոորդինատները, որի հավասարումն է. **ա)** $x^2+y^2+z^2=49$, **բ)** $(x-3)^2+(y+2)^2+z^2=2$:

214. Ապացուցեք, որ հետևյալ հավասարումներից յուրաքանչյուրը գնդային մակերևույթի հավասարում է: Գտեք այդ գնդային մակերևույթի շառավիղը և կենտրոնի կոորդինատները. **ա)** $x^2-4x+y^2+z^2=0$, **բ)** $x^2+y^2+z^2-2y=24$, **գ)** $x^2+2x+y^2+z^2=3$, **դ)** $x^2-x+y^2+3y+z^2-2z=2{,}5$:

215. 41դմ շառավիղով գունդը հատած է հարթությամբ, որի հեռավորությունը կենտրոնից 9դմ է: Գտեք հատույթի մակերեսը:

216. ABC եռանկյան գագաթներն ընկած են 13սմ շառավիղով գնդային մակերևույթի վրա: Գտեք գնդային մակերևույթի կենտրոնի հեռավորությունը եռանկյան հարթությունից, եթե AB=6սմ, BC=8սմ, AC=10սմ:

217. Ուղղանկյան գագաթներն ընկած են 10սմ շառավիղով գնդային մակերևույթի վրա: Գտեք գնդային մակերևույթի կենտրոնի հեռավորությունը ուղղանկյան հարթությունից, եթե ուղղանկյան անկյունագիծը 16սմ է:

218. Եռանկյան կողմերը շոշափում են գնդային մակերևույթը, որի շառավիղը 5սմ է: Գտեք գնդային մակերևույթի կենտրոնի հեռավորությունը եռանկյան հարթությունից, եթե եռանկյան կողմերն են 10սմ, 10սմ և 12սմ:

219. ABC եռանկյան բոլոր կողմերը շոշափում են 5սմ շառավիղով գնդային մակերևույթը: Գտեք գնդային մակերևույթի կենտրոնի հեռավորությունը այդ եռանկյան հարթությունից, եթե AB=13սմ, BC=14սմ, CA=15սմ:

220. 15սմ և 20սմ անկյունագծերով շեղանկյան բոլոր կողմերը շոշափում են 10սմ շառավիղով գնդային մակերևույթը: Գտեք գնդային մակերևույթի կենտրոնի հեռավորությունը շեղանկյան հարթությունից:

221. OH հատվածը $OABC$ քառանիստի բարձրությունն է: Պարզեք O կենտրոն ու R շառավիղ ունեցող գնդային մակերևույթի և ABC հարթության փոխադարձ դասավորությունը, եթե **ա)** R=6դմ, OH=60սմ, **բ)** R=3մ, OH=95սմ, **գ)** R=5դմ, OH=45սմ, **դ)** R=3,5դմ, OH=40սմ:

222. R շառավիղով գնդի կենտրոնի և հատող հարթության հեռավորությունը d է: Հաշվեք. **ա)** հատույթի S մակերեսը, եթե R=12սմ, d=8սմ, **բ)** R-ը, եթե հատույթի մակերեսը 12սմ^2 է, d=2սմ:

223. Գնդային մակերևույթի շառավիղի միջնակետով տարված է հատող հարթություն՝ այդ շառավիղին ուղղահայաց: Գնդային մակերևույթի շառավիղը R է: Գտեք. **ա)** ստացված հատույթի շառավիղը, **բ)** այն կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը, որի գագաթը գնդային մակերևույթի կենտրոնն է, իսկ հիմքը՝ ստացված հատույթը:

224. Հատող հարթությունն անցնում է R շառավիղով գնդային մակերևույթի տրամագծի ծայրակետով՝ այնպես, որ այդ հարթությունը և տրամագիծը կազմում են α անկյուն: Գտեք հատույթում ստացված շրջանագծի երկարությունը, եթե. **ա)** R=2սմ, $\alpha=30°$, **բ)** R=5մ, $\alpha=45°$:

225. R շառավիղով, տրված գնդի սահման հանդիսացող գնդային մակերևույթի կետով տարված են երկու հարթություններ, որոնցից մեկը գնդային մակերևույթի շոշափողն է, իսկ երկրորդը՝ շոշափող հարթության նկատմամբ թեքված է φ անկյան տակ: Գտեք տրված գնդի հատույթի մակերեսը:

226. 120° եռանկյան անկյան կիսորդը շոշափում է գծագրի մակերևույթը: Գտեք այդ գծագրի մակերևույթի շառավիղը և շոշափման կետը եռանկյան հորիզոնական կողմի հետ, եթե գծագրի մակերևույթի կեսդոգծի և եռանկյան կողմի հոմոթետիայի գործակիցը a է:

227. Գծագրի մակերևույթի շառավիղը 112սմ է: Կետը գտնվում է գծագրի մակերևույթը շոշափող հարթության մեջ՝ շոշափման կետից 15սմ հեռավորության վրա: Գտեք այդ կետի հեռավորությունը գծագրի մակերևույթի առանցքից:

228. Գտեք այն գծագրի մակերևույթի հավասարումը, որի շառավիղը է. **ա)** 6սմ, **բ)** 2դմ, **գ)** $\sqrt{2}$ մ, **դ)** $2\sqrt{3}$ սմ:

229. Գծագրի մակերևույթի կեցտոնով անցող հարթության գործակիցը $9\frac{2}{7}$ է: Գտեք գծագրի մակերևույթի հավասարումը:

230. Գծագրի մակերևույթի գործակիցը $324\frac{2}{7}$ է: Գտեք գծագրի մակերևույթի շառավիղը:

231. Գծագրի մակերևույթի բազմանդամ օգտագործող անհայտների անցում դեպի նոր գծագրի մակերևույթների հավասարումներ:

1. Ինչո՞ է հավասար գլանի հիմքի տրամագիծը և գլանի ծնորսով անցնող հարթության կազմած անկյունը:
2. Ի՞նչ պատիճ է գլանի հատույթը այն հարթությամբ, որը զուգահեռ է գլանի ծնորսին:
3. Գլանի հիմքի միս վերջավոր եռ երիտ՝ մյուսից ոչ զուգահեռ լարեր: Նյո լարերի վերջերի մեջտեղ անցնում հեռահարության ուղիղ է:

լինել. **ա)** գլանի բարձրությանը հավասար, **բ)** գլանի բարձրությունից մեծ, **գ)** գլանի բարձրությունից փոքր:

4. Երկու գլանաձև մանրակներ երեսպատվում են նիկելի միևնույն հաստության շերտով: Առաջին մանրակի բարձրությունը կրկնակի մեծ է երկրորդի բարձրությունից, բայց նրա հիմքի շառավիղը երկու անգամ փոքր է երկրորդ մանրակի հիմքի շառավիղից: Մանրակներից որի՞ համար է ավելի շատ նիկել ծախսվում:
5. Միմյանց հավասա՞ր են, արդյոք, այն անկյունները, որոնք կոնի ծնորդները կազմում են՝ **ա)** հիմքի հարթության հետ, **բ)** կոնի առանցքի հետ:
6. Ի՞նչ պատկեր է կոնի հատույթն այն հարթությամբ, որն անցնում է կոնի գագաթով:
7. A և B կետերը պատկանում են գնդին: Այդ գնդին պատկանու՞մ է, արդյոք, AB հատվածի ցանկացած կետը:
8. 4սմ և $2\sqrt{2}$ սմ էջերով ուղղանկյուն եռանկյան բոլոր գագաթները կարո՞ղ են, արդյոք, գտնվել $\sqrt{5}$ սմ շառավիղով գնդային մակերևույթի վրա:
9. Կարո՞ղ են, արդյոք, միևնույն կենտրոնով և անհավասար շառավիղներով երկու գնդային մակերևույթներն ունենալ ընդհանուր շոշափող հարթություն:
10. Ի՞նչ պատկեր է ներկայացնում տարածության այն բոլոր կետերի բազմությունը, որոնցից տրված հատվածը երևում է ուղիղ անկյան տակ:

Լրացուցիչ խնդիրներ

236. Գլանի առանցքային հատույթի մակերեսը S է: Գտեք գլանի հիմքի շառավիղի միջնակետով անցնող և այդ շառավիղին ուղղահայաց հարթությամբ հատույթի մակերեսը:

237. $ABCD$ ուղղանկյան A և B գագաթներն ընկած են գլանի հիմքերից մեկի շրջանագծի վրա, իսկ C և D գագաթները՝ մյուս հիմքի շրջանագծի վրա: Գտեք գլանի շառավիղը, եթե նրա ծնորդը a է, $AB=a$, իսկ BC ուղղի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը $60°$ է:

238. Ապացուցեք, որ եթե հարթությունը զուգահեռ է գլանի առանցքին, և այդ հարթության ու առանցքի հեռավորությունը հավասար է գլանի շառավիղին, ապա հարթությունն ընդգրկում է գլանի ծնորդ, ընդ որում՝ միայն մեկը: (Այդ դեպքում հարթությունը կոչվում է **գլանին շոշափող հարթություն**):

239. Ուղղանկյունը անհավասար կողմերի շուրջը պտտելիս առաջանում են գլաններ, որոնց լրիվ մակերևույթների մակերեսները S_1 և S_2 են: Գտեք այդ ուղղանկյան անկյունագիծը:

240. Գտեք գլանի լրիվ և կողմնային մակերևույթների մակերեսների հարաբերությունը, եթե գլանի առանցքային հատույթը՝ ա) քառակուսի է, բ) $ABCD$ ուղղանկյունն է, որում $AB:AD=1:2$:

241. Գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է այն շրջանի մակերեսին, որն արտագծած է նրա առանցքային հատույթին: Գտնել գլանի շառավիղի և բարձրության հարաբերությունը:

242. Գտեք կողմնային մակերևույթի ամենամեծ մակերես ունեցող գլանի շառավիղն ու բարձրությունը, եթե գլանի առանցքային հատույթի պարագիծը $2p$ է:

243. Գլանաձև բաժակի կողքի պատերի և հատակի հաստությունը 1սմ է, բաժակի բարձրությունը 16սմ է, իսկ ներքին շառավիղը 5սմ: Որոշեք բաժակի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

244. Կոնային մակերևույթը փաթաթված է շրջանի քառորդ մասով: Ապացուցեք, որ այդ կոնի ծնորդը հիմքի շառավիղի քառապատիկն է:

245. Գտեք կոնի առանցքային հատույթի գագաթի անկյան կոսինուսը, եթե այդ կոնն ունի երեք զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց ծնորդներ:

246. Կոնի հիմքի մակերեսը S_1 է, իսկ կողմնային մակերևույթի մակերեսը S_0: Գտեք կոնի առանցքային հատույթի մակերեսը:

247. Կոնի կողմնային և լրիվ մակերևույթների մակերեսների հարաբերությունը $\frac{7}{8}$ է: Գտեք կոնի ծնորդի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը:

248. Կոնի գագաթով և հիմքի 120° աղեղ ձգող լարով տարված է հատույթ, որը հիմքի հարթության հետ կազմում է 45° անկյուն: Գտեք այդ հատույթի մակերեսը, եթե հիմքի շառավիղը 4սմ է:

249. Գտեք կոնի ծնորդի և բարձրության կազմած անկյունը, եթե նրա կողմնային մակերևույթի փռվածքը 270° աղեղով սեկտոր է:

250. a և b էջերով ուղղանկյուն եռանկյունը պտտվում է ներքնաձիգի շուրջը: Գտեք ստացված մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

251. Հավասարասրուն սեղանը, որի հիմքերը 6սմ և 10սմ են, իսկ սուր անկյունը 60°, պտտվում է մեծ հիմքի շուրջը: Հաշվեք ստացված մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

252. Կոնի բարձրությունը 4սմ է, իսկ հիմքի շառավիղը 3սմ: Հաշվեք կոնին ներգծած* կանոնավոր n-անկյուն բուրգի լրիվ մակերևույթի մակերեսը, եթե ա) $n=3$, բ) $n=4$, գ) $n=6$:

253. Հատած կոնի առանցքային հատույթի անկյունագծերը փոխուղղահայաց են: Առանցքային հատույթի հիմքերից մեկը 40սմ է, իսկ այդ հատույթի մակերեսը՝ 36դմ^2: Հաշվեք հատած կոնի կողմնային և լրիվ մակերևույթների մակերեսները:

---

* Բուրգը կոչվում է կոնին ներգծած, եթե նրա հիմքը ներգծած է կոնի հիմքին, իսկ բուրգի գագաթը համընկնում է կոնի գագաթին:

254. Ապացուցեք, որ. **ա)** գնդային մակերևույթի կենտրոնը գնդային մակերևույթի համաչափության կենտրոնն է, **բ)** գնդային մակերևույթի կենտրոնով անցնող ցանկացած ուղիղը գնդային մակերևույթի համաչափության առանցք է, **գ)** գնդային մակերևույթի կենտրոնով անցնող ցանկացած հարթությունը գնդային մակերևույթի համաչափության հարթություն է:

255. 1,8սմ և 2,4սմ էջերով ուղղանկյուն եռանկյան գագաթներն ընկած են գնդային մակերևույթի վրա: **ա)** Ապացուցեք,որ եթե գնդային մակերևույթի շառավիղը 1,5սմ է, ապա գնդային մակերևույթի կենտրոնն ընկած է եռանկյան հարթության մեջ: **բ)** Գտեք գնդային մակերևույթի կենտրոնի հեռավորությունը եռանկյան հարթությունից, եթե գնդային մակերևույթի շառավիղը 6,5սմ է:

256. R շառավիղով գնդային մակերևույթի կենտրոնի հեռավորությունը տրված ուղղից d է: Ապացուցեք, որ. **ա)** եթե $d<R$, ապա ուղիղը հատում է գնդային մակերևույթը երկու կետում, **բ)** եթե $d=R$, ապա ուղիղը գնդային մակերևույթի հետ ունի միայն մեկ ընդհանուր կետ, **գ)** եթե $d>R$, ապա ուղիղը և գնդային մակերևույթը ոչ մի ընդհանուր կետ չունեն:

257. Գտեք $(x-3)^2+y^2+(z+5)^2=25$ հավասարումով տրված գնդային մակերևույթի և կոորդինատների առանցքների հատման կետերի կոորդինատները:

258. Գտեք $x^2+y^2+z^2=36$ գնդային մակերևույթի այն հատույթի շառավիղը, որն առաջանում է $M(2;4;5)$ կետով անցնող և աբսցիսների առանցքին ուղղահայաց հարթությամբ:

259. Երկու ուղղանկյուններ ընկած են տարբեր հարթությունների մեջ և ունեն ընդհանուր կողմ: Ապացուցեք, որ այդ ուղղանկյունների բոլոր գագաթներն ընկած են մի գնդային մակերևույթի վրա:

260. Երկու հավասար գնդային մակերևույթների կենտրոնների հեռավորությունը փոքր է նրանց տրամագծից: **ա)** Ապացուցեք, որ այդ գնդային մակերևույթների հատումը շրջանագիծ է: **բ)** Գտեք այդ շրջանագծի շառավիղը, եթե գնդային մակերևույթների շառավիղները R են, իսկ նրանց կենտրոնների հեռավորությունը $1,6R$ է:

261. A, B, C և D կետերն ընկած են R շառավիղով գնդային մակերևույթի վրա, ընդ որում՝ $\angle ADB=\angle BDC=\angle CDA=2\varphi$, $AD=BD=CD$: Գտեք. **ա)** AB-ն և AD-ն, **բ)** գնդային մակերևույթի ABC հարթությամբ հատույթի շրջանի մակերեսը:

262. 10սմ շառավիղով գնդային մակերևույթից դուրս տրված է M կետը, որը գտնվում է գնդային մակերևույթի նրան ամենամոտ կետից 16սմ հեռավորության վրա: Գտեք գնդային մակերևույթի վրա ընկած այն շրջանագծի երկարությունը, որի բոլոր կետերը գտնվում են M կետից 24սմ հեռավորության վրա:

263. Մարմինը սահմանափակված է ընդհանուր կենտրոնով երկու գնդային մակերևույթներով: Ապացուցեք, որ նրա գնդային մակերևույթների կենտրոնով անցնող հարթությամբ հատույթի մակերեսը հավասար է ներսի գնդային մակերևույթի շոշափող հարթությամբ հատույթի մակերեսին:

Դասակցիկած խնդիրներ բազմաբնտրի, գլուխ, ինչ և գնդի վերաբերյալ

Պարբերենք մի քանի տերմիններ, որոնք հանդիպում են այս բաժնի խնդիրներում: <u>Հիշենք</u>, որ բազմանդամը կոչվում է **գծային մակերևույթի մասնիկ**, եթե գնում գծային մակերևույթի շոշափում է մի որոշ մասնիկ: Այն դեպքում գծային մակերևույթի կոչվում է **բազմանդամ մակերևույթ**: Բազմանդամը կոչվում է **գնում գծային մակերևույթ**, եթե այն որոշ կոորդինատներում հավասարվում է զրոյի: Այն մասնիկները, որոնք գնում են գծային մակերևույթի վրա: Այն դեպքում գծային մակերևույթը կոչվում է **բազմանդամ մասնիկ**:

264. Ենթադրենք, որ եթե գնում գծային մասնիկ՝ հատկություն պահպանվում գնում գծի ամբողջ է գնում ամբողջով, ապա գրա գծային կոորդինատները բավարարում են 8ասի պայմանին:

265. Ապացուցել գծային գծային է բոլոր, որ նրանք ճշգրիտ ներքին կոորդինատներ է: Գտնել բոլոր գծային մակերևույթները, եթե այդ գծային մասնիկները գնում են գծի վրա:

266. <u>Հատած</u> գծային գծային է կամայական *n*-աստիճան բոլոր հատած գծի վրա (այնպես, բոլոր նրանք գծային գծային են հատած գծի նրանցով): <u>Հիշենք</u>, որ բազմանդամը կոչվում է գծային, եթե այն որոշ կոորդինատներում հավասարվում է զրոյի: Գտնել բոլոր գծային մակերևույթները, եթե

a) $n=2$, **b)** $n=3$, **c)** $n=4$, **d)** $n=6$:

267. Ենթադրենք, որ եթե կամայական կորագծի է գծային գծային մակերևույթ, այն գնում գծային մակերևույթի վրա: Ապացուցել, որ հատիկների է, որը գիացում է այդ կորագծի նրանցները:

268. Ենթադրենք, որ կամայական բոլոր գծային գծային գծային մակերևույթի կենտրոնը գնում է այդ բոլոր գծային գծային վրա:

269. Գտնել R շառավիղով գնում գծային մակերևույթի արագությունը, եթե այդ բացակայում գծային վտարը գնում է գծային մակերևույթ, **b)** կամայական մակերևույթ է, **c)** կամայական գծային է:

կան քառանկյուն է:

* Պնդումը կոչվում է գլանի գծային, եթե նրա նրանք գծային գծային են գլանի նրանցով:

270. R շառավիղով գնդային մակերևույթին արտագծած է կանոնավոր քառանկյուն բուրգ, որի գագաթին հարակից հարթ անկյունը α է: **ա)** Գտեք բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը: **բ)** Հաշվեք այդ մակերեսը $R=5$սմ, $\alpha=60^\circ$ դեպքում:

271. Ապացուցեք, որ եթե կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգին կարելի է ներգծել գնդային մակերևույթ, ապա այդ հատած բուրգի հարթագիծը հավասար է նրա կողմնային նիստի հիմքերի կիսագումարին:

272. Ապացուցեք, որ. **ա)** կանոնավոր պրիզմային արտագծած գնդային մակերևույթի կենտրոնն ընկած է այդ պրիզմայի հիմքերի կենտրոնները միացնող հատվածի միջնակետում, **բ)** կանոնավոր բուրգին արտագծած գնդային մակերևույթի կենտրոնն ընկած է այդ բուրգի բարձրության կամ նրա շարունակության վրա:

273. Ապացուցեք, որ. **ա)** ցանկացած քառանիստին կարելի է արտագծել գնդային մակերևույթ, **բ)** ցանկացած քառանիստին կարելի է ներգծել գնդային մակերևույթ:

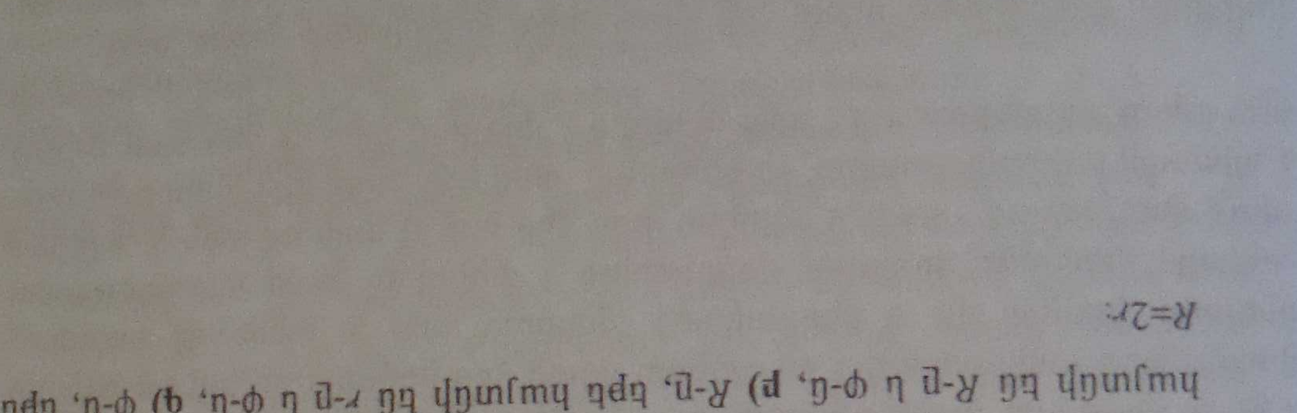
274. Գնդային մակերևույթի շառավիղը R է: Գտեք այդ գնդային մակերևույթին ներգծած հետևյալ բազմանիստի լրիվ մակերևույթի մակերեսը. **ա)** խորանարդի, **բ)** R բարձրություն ունեցող կանոնավոր վեցանկյուն պրիզմայի, **գ)** կանոնական քառանիստի:

275. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի կողմը a է, իսկ կողմնային կողը $2a$: Գտեք նրան ներգծած և արտագծած գնդային մակերևույթների շառավիղները:

276. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգին ներգծած և արտագծած գնդային մակերևույթների շառավիղները են 2սմ և 5սմ: Գտեք բուրգի բարձրությունը և հիմքի կողմը:

277. Գնդային մակերևույթը ներգծված է գլանին (այսինքն՝ այն շոշափում է գլանի հիմքերը և նրա յուրաքանչյուր ծնորդը, նկ.61,ա): Գտեք գնդային մակերևույթի մակերեսի հարաբերությունը գլանի լրիվ մակերևույթի մակերեսին:

278. Կոնին, որի առանցքային հատույթի գագաթի անկյունը φ է, իսկ հիմքի շառավիղը r, ներգծած է R շառավիղով գնդային մակերևույթ (այսինքն՝ գնդային մակերևույթը շոշափում է կոնի հիմքը և նրա յուրաքանչյուր ծնորդը, նկ.61,բ): Գտեք. **ա)** r-ը, եթե հայտնի են R-ը և φ-ն, **բ)** R-ը, եթե հայտնի է r-ը և φ-ն, **գ)** φ-ն, եթե $R=1$սմ, $r=\sqrt{3}$ սմ:



ա) բ) գ) դ)

Նկ. 61 Նկ. 62

279. Կոնին ներգծած է r շառավիղով գնդային մակերևույթ: Գտնք կոնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը, եթե կոնի ծնորդի և հիմքի հագեցած անկյունը α է:

280. Գլանը ներգծված է գնդային մակերևույթին (այնպիսի՝ գլանի հիմքերը գնդային մակերևույթի հատույթներ են, նկ.62,ա): Գտնք գլանի լրիվ մակերևույթի հարաբերությունը գնդային մակերևույթի մակերեսին, եթե գլանի բարձրությունը հավասար է հիմքի տրամագծին:

281. Կոնը, որի առագաստի հատույթի քառորդ աճյուռը փ է, իսկ հիմքի

ԳԼՈՒԽ III

ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԾԱՎԱԼՆԵՐԸ

§1 Ուղղանկյունանիստի ծավալը

27 Ծավալի հասկացությունը

Մարմնի ծավալի հասկացությունը ներմուծվում է հարթ պատկերի մակերեսի հասկացությանը համանման: Հարթաչափության դասընթացից հայտնի է, որ յուրաքանչյուր բազմանկյուն ունի մակերես, որը չափվում է մակերեսների չափման համար նախապես ընտրված միավորի միջոցով: Իբրև մակերեսների չափման միավոր, սովորաբար, վերցվում է այն քառակուսին, որի կողմը հավասար է հատվածների չափման միավորին:

Համանման ձևով կընդունենք, որ մեր դիտարկած մարմիններից յուրաքանչյուրն ունի ծավալ, որը կարելի է չափել ծավալների չափման համար ընտրված միավորի միջոցով: Որպես ծավալների չափման միավոր է ընդունվում այն խորանարդը, որի կողը հավասար է հատվածների չափման միավորին: 1սմ կող ունեցող խորանարդն անվանում են **խորանարդ սանտիմետր** և նշանակում են՝ **սմ**^{3}: Նույն կերպ սահմանում են **խորանարդ մետրը** (մ^3), **խորանարդ միլիմետրը** (մմ^3) և այլն:

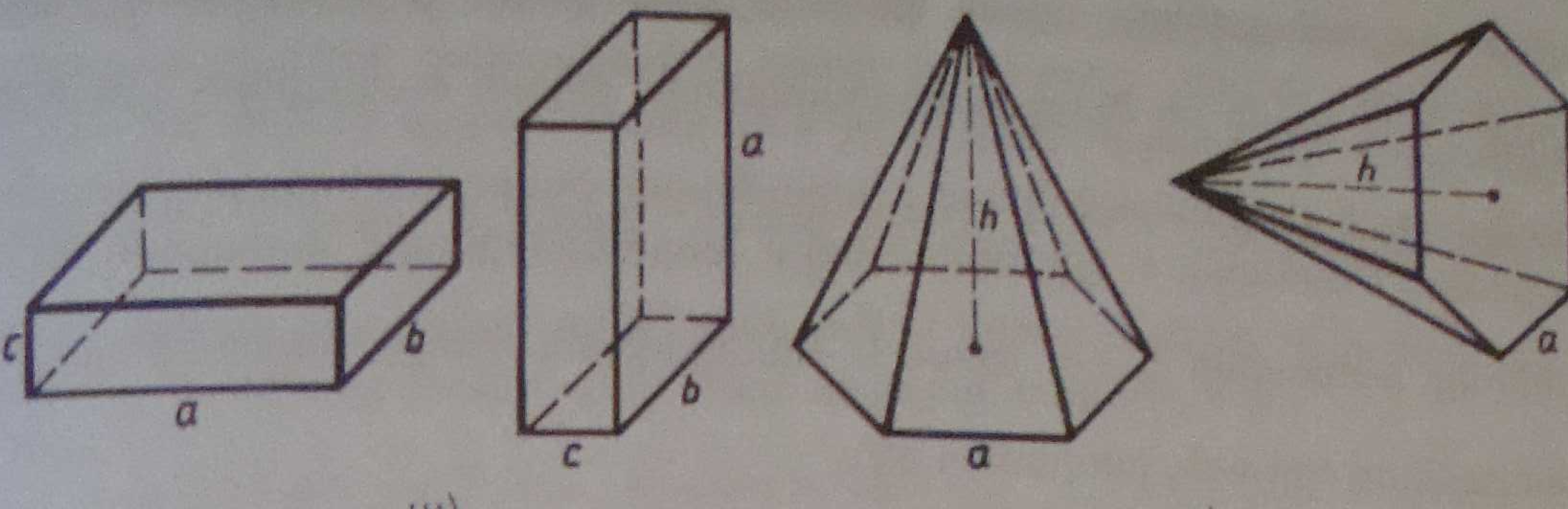
Ծավալների չափման ընթացքը համանման է մակերեսների չափման ընթացքին: Ծավալների չափման ընտրված միավորի միջոցով յուրաքանչյուր մարմնի ծավալն արտահայտվում է դրական թվով: Այդ թիվը ցույց է տալիս, թե տվյալ մարմնի մեջ քանի անգամ են տեղավորվում ծավալների չափման միավորն ու նրա մասերը: Հասկանալի է, որ մարմնի ծավալն արտահայտող թիվը կախված է ծավալների չափման միավորի ընտրությունից, և դրա համար էլ այդ թվի հետ մեկտեղ նշվում է ծավալների չափման միավորը: Օրինակ, եթե իբրև ծավալների չափման միավոր ընտրվել է 1սմ^3-ը, ըստ որի մի որևէ մարմնի V ծավալը եղել է 2-ի հավասար, ապա այդ փաստը գրվում է V=2սմ^3:

Եթե երկու մարմիններ հավասար են, ապա ծավալների չափման միավորն ու նրա մասերը այդ մարմիններից յուրաքանչյուրի մեջ տեղավորվում են նույնքան անգամ, այսինքն՝ տեղի ունի ծավալների հետևյալ հատկությունը:

1^0. Հավասար մարմինների ծավալները հավասար են:

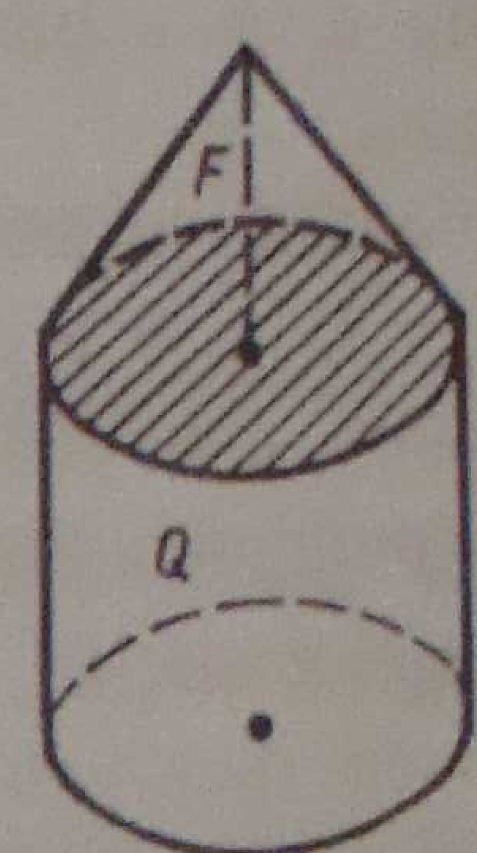
Պարզաբանում

Երկու պատկերների, մասնավորապես, երկու մարմինների հավասարությունը տարածաչափության մեջ սահմանվում է այնպես, ինչպես արվել է հարթաչափության մեջ. **երկու մարմիններ կոչվում են հավասար, եթե վերադրումով դրանք կարող են համընկնել:** Հավասար մարմինների օրի-



Նկ. 63

նակ են համապատասխանաբար հավասար չափումներով երկու ուղղանկյունանիստը (նկ. 63,ա), հավասար հիմքերով և հավասար բարձրություններով երկու ուղիղ պրիզմաները, համապատասխանաբար հավասար բարձրություններով և հիմքի կողմերով երկու կանոնավոր բուրգերը (նկ. 63,բ): Յուրաքանչյուր դեպքում նշված երկու մարմինների հավասարությունը կարելի է ապացուցել՝ պատկերների վերադրման և հավասարության աքսիոմների հիման վրա (այդ աքսիոմները և որոշ թեորեմների ապացուցումները բերված են դասագրքի հավելվածում):



$V=V_F+V_Q$

Նկ. 64

Քննության առնենք ծավալների ևս մեկ հատկություն: Դիցուք՝ մարմինը կազմված է մի քանի մարմիններից: Այս դեպքում ենթադրում ենք, որ այդ մարմիններից ցանկացած երկուսը չունեն ընդհանուր ներքին կետ, բայց կարող են ունենալ ընդհանուր սահմանային կետեր (տե՛ս նկար 64-ը, որում Q գլանը և F կոնը ունեն ընդհանուր սահմանային կետեր, դրանք այդ երկուսի ընդհանուր հիմքի կետերն են): Հասկանալի է, որ ամբողջ մարմնի ծավալը ստացվում է նրա կազմության մեջ եղած մարմինների ծավալների գումարից: Այսպիսով՝

2°. Եթե մարմինը կազմված է մի քանի մարմիններից, ապա նրա ծավալը հավասար է այդ մարմինների ծավալների գումարին:

1° և 2° հատկությունները համարվում են ծավալների հիմնական հատկություններ: Հիշենք, որ համանման հատկություններով են օժտված նաև հատվածների երկարությունները և բազմանկյունների մակերեսները: Այս հատկությունների հիման վրա հետագայում մենք կարտածենք զուգահեռանիստի, պրիզմայի, բուրգի, գլանի, կոնի, գնդի ծավալները հաշվելու բանաձևեր:

Նախապես նշենք 1° և 2° հատկություններից բխող մի հետևանք: Դիտարկենք խորանարդը, որն ընդունված է որպես ծավալների չափման միավոր: Նրա կողը հավասար է հատվածների չափման միավորին: Այդ խորանարդի կողերից յուրաքանչյուրը տրոհենք n հավասար մասերի (n-ը կամայական ամբողջ թիվ է) և տրոհման կետերով տանենք հարթություններ՝ ուղղահայաց տվյալ կողին: Խորանարդը տրոհվում է n^3 հատ

փոքր խորանարդների, որոնք միմյանց հավասար են, և յուրաքանչյուրի կողը $\frac{1}{n}$ է: Քանի որ փոքր խորանարդների՝ բոլորի ծավալների գումարը հավասար է սկզբնական ամբողջ խորանարդի ծավալին (հատկություն 2^0), այսինքն հավասար է 1-ի, ապա փոքր խորանարդներից յուրաքանչյուրի ծավալը հավասար է $\frac{1}{n^3}$ (ըստ 1^0 հատկության՝ փոքր խորանարդների ծավալները միմյանց հավասար են):

Այսպիսով՝ $\frac{1}{n}$ **կող ունեցող խորանարդի ծավալը** $\frac{1}{n^3}$ է:

Այս փաստը մեզ պետք է գալու հաջորդ կետում՝ ուղղանկյունանիստի ծավալի բանաձևն արտածելիս:

28 Ուղղանկյունանիստի ծավալը

Թեորեմ: ***Ուղղանկյունանիստի ծավալը հավասար է նրա երեք չափումների արտադրյալին:***

Ապացուցում*: P ուղղանկյունանիստի չափումները նշանակենք a, b, c տառերով, իսկ նրա ծավալը՝ V տառով: Ապացուցենք, որ $V=abc$:

Քննության առնենք երկու դեպք:

1) a, b և c չափումներն արտահայտվում են վերջավոր տասնորդական կոտորակներով, ընդ որում՝ նրանցից ամեն մեկի նիշերի թիվը ստորակետից հետո չի գերազանցում n-ը (կարելի է համարել, որ $n\geq 1$): Այդ դեպքում $a\cdot 10^n$, $b\cdot 10^n$, $c\cdot 10^n$ թվերից յուրաքանչյուրը ամբողջ թիվ է: Ուղղանկյունանիստի յուրաքանչյուր կողը տրոհենք $\frac{1}{10^n}$ երկարությամբ՝ միմյանց հավասար հատվածների: Տրոհման կետերից յուրաքանչյուրով տանենք հարթություն՝ ուղղահայաց տվյալ կողին: P ուղղանկյունանիստը տրոհվում է $\frac{1}{10^n}$ կողերով $abc\,10^{3n}$ հատ հավասար խորանարդների: Քանի որ այդպիսի յուրաքանչյուր խորանարդի ծավալը $\frac{1}{10^{3n}}$ է (տե՛ս կետ 27-ը), ապա ամբողջ P ուղղանկյունանիստի ծավալը հավասար է $abc\cdot 10^{3n}\cdot\frac{1}{10^{3n}}=abc$: Այսպիսով՝ $V=abc$:

2) a, b և c չափումներից թեկուզ մեկն արտահայտվում է անվերջ տասնորդական կոտորակով: Դիտարկենք a_n, b_n, c_n վերջավոր տասնորդա-

---

* Այս թեորեմի ապացուցումը ուսուցման պարտադիր պահանջների մեջ չի մտնում:

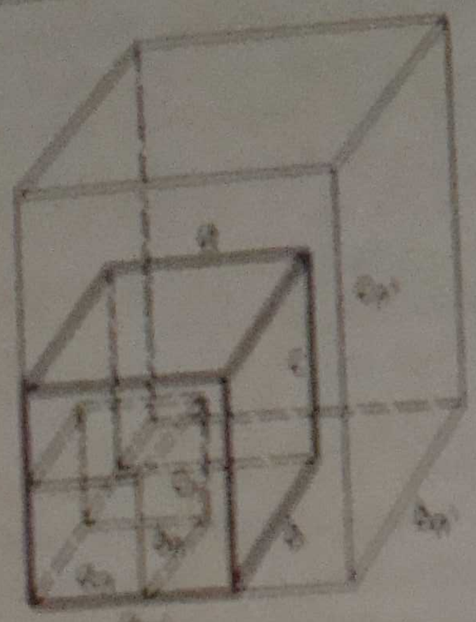
կաց հատորակերը, որոք ստացվում են a, b, c բվերից, երբ որևցից յուրաքանչյուրում ստորակետից հետո $(n+1)$-րդից սկսած բոլոր բիւ-նշանները ոչնչացնենք: Ձայն որ a թիվը a_n-ից ստորեհում է ոչ ավելի, քան $\frac{1}{10^n}$-ը. ապա $a_n \le a \le a'_n$, որտեղ $a'_n = a_n + \frac{1}{10^n}$: Հաշվենք ապա-վասրությունների տեղի ունեցած սխալները b և c բվերի համար: Այդ ավելաց-րումը ցույց տալը դիշացց կարող է. որ $V=abc$: Ինչն էլ պահանջում էր պահանջվում:

Խնդիր 1: Որոշել ծավալը հավասար a, b, c կողերով ուղղանկյուն զուգահեռանիստի:

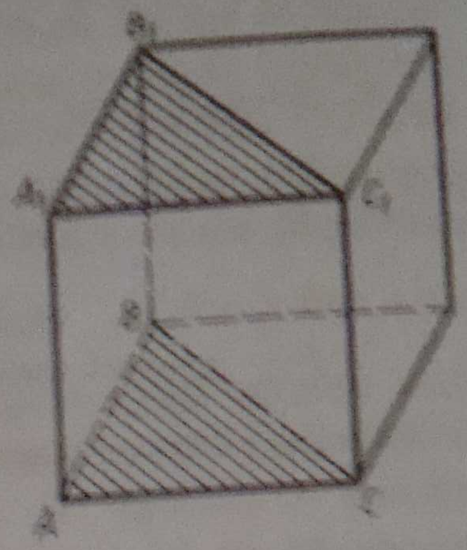
Խնդիրը, որոշելու համար a և b հողերով ընտրենք պատ-կան c. Այդ դեպքում S հաշվելը հավասար է ab, իսկ ուղղանկյունանիստի h բարձրությունը՝ c: Հետևաբար՝ $V=abc=Sh$:

Խնդիր 2: Այն ուղղի պրիզմայի ծավալը, որի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է, հավասար է հիմքի մակերեսի և բարձրության արտադրյալին:

Այս պնդումը ապացուցելու համար ABC հիմքով ($\angle A$-ն ուղղ անկյուն է) ուղղ եռանկյուն պրիզմայի լրացնենք այնպես, մինչև ստացվի ուղղանկյունանիստ, մեկը ցույց է տրված նկար 66-ում: Ըստ նեղացր 1-ի՝ ստացված ուղղանկյունանիստի ծավալը հավասար է $2S_{ABC} \cdot h$, որ-տեղ S_{ABC}-ն ABC եռանկյան մակերեսն է, h-ը՝ պրիզմայի բարձրությունը:



આકૃતિ 25



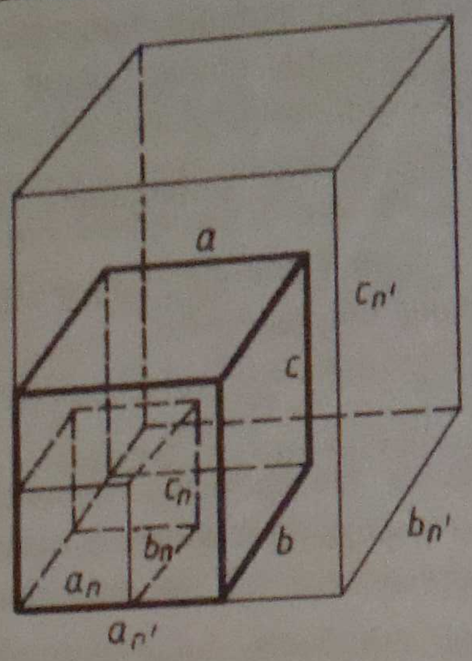
આકૃતિ 26

સ્વાધ્યાય 3

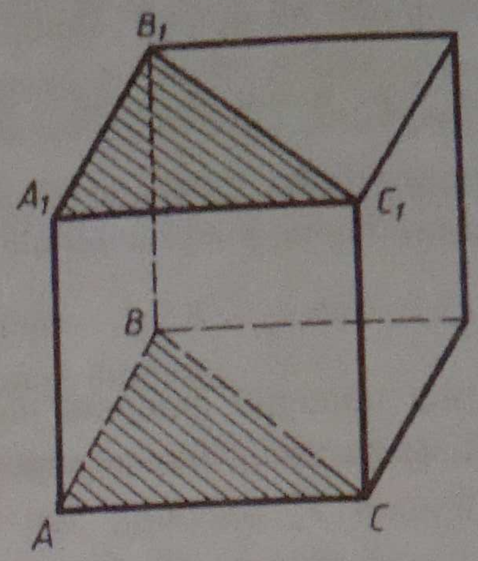
282. જો બિંદુઓ $P(x_1, y_1, z_1)$ અને $Q(x_2, y_2, z_2)$ વચ્ચેનું અંતર d હોય તો $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$ સાબિત કરો.

283. $P(x, y, z)$ થી ઊગમબિંદુ, x-અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષનાં અંતર શોધો.

284. જો $A(x, y, z)$ થી $B(3, 4, 5)$ નું અંતર $\sqrt{2}$ હોય તો x, y, z વચ્ચે કયો સંબંધ હોય?



Նկ. 65



Նկ. 66

B_1BC հարթությունը տրոհում է ուղղանկյունանիստը երկու հավասար ուղիղ պրիզմաների, որոնցից մեկը տրված է (այդ պրիզմաները հավասար են, որովհետև ունեն հավասար հիմքեր և հավասար բարձրություններ): Հետևաբար՝ տրված պրիզմայի V ծավալը հավասար է ուղղանկյունանիստի ծավալի կեսին, այսինքն՝ $V=S_{ABC}\cdot h$, ինչն էլ պահանջվում էր ապացուցել:

Խնդիրներ

282. R մարմինը կազմված է P և Q մարմիններից, որոնց ծավալները համապատասխանաբար V_1 և V_2 են: R մարմնի V ծավալն արտահայտեք V_1-ի և V_2-ի միջոցով, եթե. ա) P և Q մարմինները ընդհանուր ներքին կետեր չունեն, բ) P և Q մարմիններն ունեն ընդհանուր ներքին մաս, որի ծավալը $\frac{1}{3}V_1$ է:

283. Գտեք այն ուղղանկյունանիստի ծավալը, որի հիմքի կողմերը a և b են, իսկ բարձրությունը h է, եթե

ա) $a=11$, $b=12$, $h=15$,

բ) $a=3\sqrt{2}$, $b=\sqrt{5}$, $h=10\sqrt{10}$,

գ) $a=18$, $b=5\sqrt{3}$, $h=13$,

դ) $a=3\frac{1}{3}$, $b=\sqrt{5}$, $h=0{,}96$:

284. Գտեք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի ծավալը, եթե.

ա) $AC=12$սմ, գ) $DE=1$սմ, որտեղ E-ն AB կողի միջնակետն է:

բ) $AC_1=3\sqrt{2}$ մ,

285. Ուղղանկյունանիստի չափումներն են 8սմ, 12սմ և 18սմ: Գտեք այն խորանարդի կողը, որի ծավալը հավասար է այդ ուղղանկյունանիստի ծավալին:

286. Աղյուսն ունի 25սմ, 12սմ և 6,5սմ չափումներով ուղղանկյունանիստի ձև: Աղյուսի խտությունը 1,8 գ/սմ^3 է: Գտեք նրա զանգվածը:

287. Գտեք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստի ծավալը, եթե AC_1=13սմ, BD=12սմ, BC_1=11սմ:

288. Ուղղանկյունանիստի անկյունագիծը 18սմ է և կողմնային նիստի հարթության հետ կազմում է 30^0 անկյուն, իսկ կողմնային կողի հետ՝ 45^0 անկյուն: Գտեք այդ ուղղանկյունանիստի ծավալը:

289. Ուղղանկյունանիստի անկյունագիծը կողմնային նիստի հարթության հետ կազմում է α անկյուն, իսկ հիմքի հարթության հետ՝ β անկյուն: Գտեք այդ ուղղանկյունանիստի ծավալը, եթե նրա բարձրությունը h է:

290. Ուղղանկյունանիստի հիմքի կողմերը a և b են: Ուղղանկյունանիստի անկյունագիծը կազմում է 30^0 անկյուն այն կողմնային նիստի հետ, որն ընդգրկում է հիմքի b կողմը: Գտեք այդ ուղղանկյունանիստի ծավալը:

291. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստում B_1D անկյունագիծը հիմքի հարթության հետ կազմում է 45^0 անկյուն, իսկ A_1B_1BD երկնիստ անկյունը 60^0 է: Գտեք ուղղանկյունանիստի ծավալը, եթե նրա հիմքի անկյունագիծը 12սմ է:

292. Գտեք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստի ծավալը, եթե. **ա)** AC_1=1մ, $\angle C_1AC=45^0$, $\angle C_1AB=60^0$, **բ)** AC_1=24սմ, $\angle C_1AA_1=45^0$, իսկ AC_1 անկյունագիծը կողմնային նիստի հարթության հետ կազմում է 30^0 անկյուն:

293. Գտեք $ABCA_1B_1C_1$ ուղիղ պրիզմայի ծավալը, եթե $\angle BAC=90^0$, BC=37սմ, AB=35սմ, AA_1=1,1դմ:

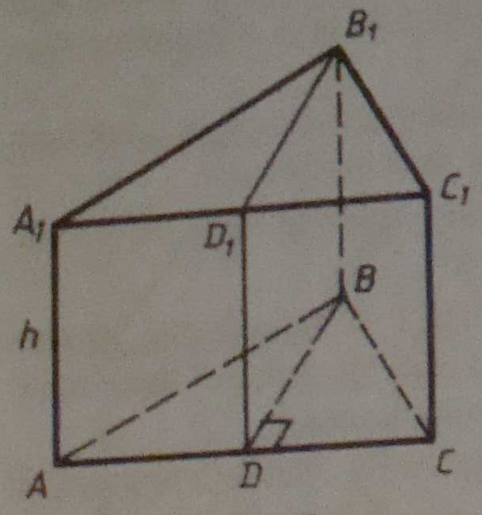
§2 Ուղիղ պրիզմայի և գլանի ծավալները

29 Ուղիղ պրիզմայի ծավալը

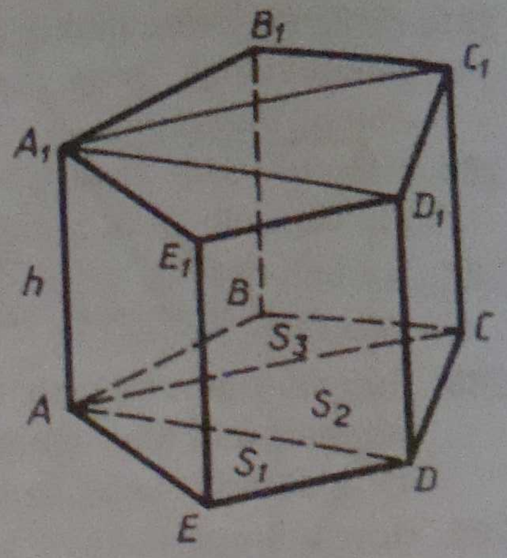
Թեորեմ: ***Ուղիղ պրիզմայի ծավալը հավասար է հիմքի մակերեսի և բարձրության արտադրյալին:***

Ապացուցում: Թեորեմն ապացուցենք նախ՝ ուղիղ եռանկյան պրիզմայի, ապա՝ կամայական ուղիղ պրիզմայի համար:

1. Դիտարկենք $ABCA_1B_1C_1$ ուղիղ եռանկյուն պրիզման, որի բարձրությունը h է, և ծավալը՝ V: Տանենք ABC եռանկյան այն բարձրությունը (BD հատվածը նկար 67-ում), որով այդ եռանկյունը տրոհվում է երկու ուղղանկյուն եռանկյունների (եռանկյան բարձրությունից առնվազն մեկը այդ պայմանին բավարարում է): BB_1D հարթությունը տրված պրիզման տրո-



Նկ. 67



Նկ. 68

հում է երկու պրիզմաների, որոնց հիմքերը ABD և BDC ուղղանկյուն եռանկյուններն են: Ուրեմն այդ պրիզմաների V_1 և V_2 ծավալները համապատասխանաբար հավասար են $S_{ABD} \cdot h$ և $S_{BDC} \cdot h$: Ըստ ծավալների 2^0 հատկության $V=V_1+V_2$, այսինքն $V=S_{ABD} \cdot h + S_{BDC} \cdot h = (S_{ABD}+S_{BDC}) \cdot h$:

Այսպիսով

$$V=S_{ABC} \cdot h: \qquad (1)$$

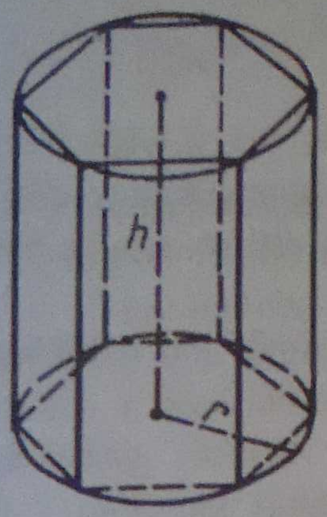
2. Այժմ թեորեմն ապացուցենք կամայական ուղիղ պրիզմայի համար, որի բարձրությունը h է, և հիմքի մակերեսը՝ S: Այդպիսի պրիզման կարելի է տրոհել ուղիղ եռանկյուն պրիզմաների, որոնցից յուրաքանչյուրի բարձրությունը h է: Օրինակ, նկար 68-ում պատկերված ուղիղ հնգանկյուն պրիզման տրոհված է երեք ուղիղ եռանկյուն պրիզմաների: Եռանկյուն պրիզմաներից յուրաքանչյուրի ծավալն արտահայտենք ըստ (1) բանաձևի և ապա գումարենք այդ ծավալները: Փակագծերից հանելով ընդհանուր արտադրիչ h-ը՝ փակագծերում մնում է եռանկյուն պրիզմաների հիմքերի մակերեսների գումարը, որն էլ սկզբնական պրիզմայի հիմքի S մակերեսն է: Այսպիսով՝ սկզբնական պրիզմայի ծավալը հավասար է Sh արտադրյալին:

Թեորեմն ապացուցված է:

30 Գլանի ծավալը

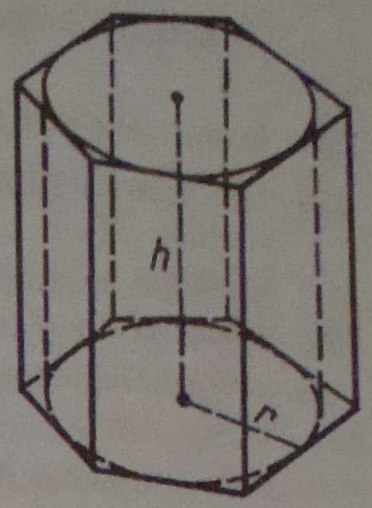
Ասում են, որ **պրիզման ներգծած է գլանին**, եթե նրա հիմքերը ներգծած են գլանի հիմքերին (նկ. 69), և որ **պրիզման արտագծած է գլանին**, եթե նրա հիմքերը արտագծած են գլանի հիմքերին (նկ. 70): Հասկանալի է, որ ցանկացած պրիզմա, որ ներգծած կամ արտագծած է գլանին, ունի հենց գլանի բարձրությանը հավասար բարձրություն:

Թեորեմ: ***Գլանի ծավալը հավասար է հիմքի մակերեսի և բարձրության արտադրյալին:***



Գլանին ներգծած պրիզմա

Նկ. 69



Գլանին արտագծած պրիզմա

Նկ. 70

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ : Դիցուք՝ տրված է P գլանը, որի շառավիղը r է, բարձրությունը՝ h: Այդ գլանին ներգծենք n-անկյուն F_n ուղիղ պրիզմա, իսկ այդ պրիզմային ներգծենք P_n գլան (նկ. 71): P և P_n գլանների ծավալները նշանակենք V և V_n, իսկ P_n գլանի շառավիղը՝ r_n: F_n պրիզմայի ծավալը հավասար է $S_n \cdot h$, որտեղ S_n-ը պրիզմայի հիմքի մակերեսն է: Քանի որ P գլանն ընդգրկում է F_n պրիզման, որն իր հերթին ընդգրկում է P_n գլանը, ապա տեղի ունի հետևյալ կրկնակի անհավասարությունը.

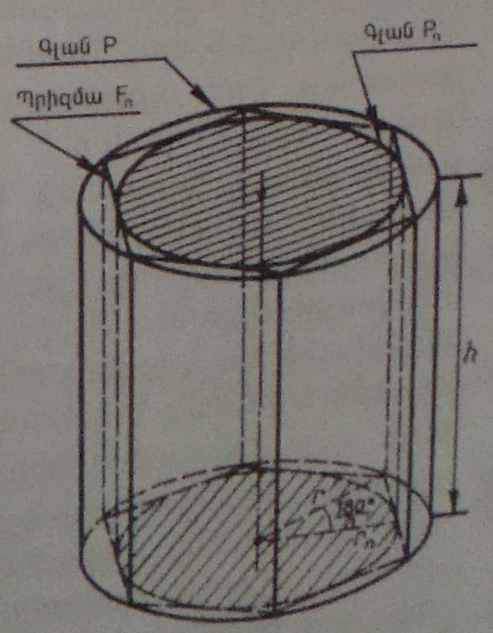
$$V_n < S_n \cdot h < V: \qquad (2)$$

Պատկերացնենք, որ n թիվը անսահմանափակ կերպով մեծանում է: Այդ դեպքում P_n գլանի r_n շառավիղը ձգտում է P գլանի r շառավիղին ($r_n = r \cdot \cos\frac{180^0}{n}$, երբ $n \to \infty$, ապա $\frac{180^0}{n} \to 0$, ուրեմն՝ $\cos\frac{180^0}{n} \to 1$, այսինքն՝ $r_n \to r$): Հետևաբար՝ P_n գլանի ծավալը ձգտում է P գլանի ծավալին. $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = V$: (2) անհավասարությունից հետևում է, որ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \cdot h = V$: Բայց $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pi r^2$: Այսպիսով՝

$$V = \pi r^2 h: \qquad (3)$$

Գլանի πr^2 հիմքի մակերեսը նշանակենք S, (3) բանաձևից ստանում ենք. $V = S \cdot h$:

Թեորեմն ապացուցված է:



Նկ. 71

Հարցեր և խնդիրներ

294. Գտեք $ABCA_1B_1C_1$ ուղիղ պրիզմայի ծավալը, եթե. ա) $\angle BAC=120^0$, $AB=5$սմ, $AC=3$սմ, իսկ կողմնային նիստերի մակերեսներից ամենամեծը 35սմ^2 է: բ) $\angle AB_1C=60^0$, $AB_1=3$, $CB_1=2$, և BB_1 կող ունեցող երկնիստ անկյունը ուղիղ անկյուն է:

295. Գտեք $ABCA_1B_1C_1$ ուղիղ պրիզմայի ծավալը, եթե $AB=BC=m$, $\angle ABC=\varphi$ և $BB_1=BD$, որտեղ BD-ն ABC եռանկյան բարձրությունն է:

296. Գտեք $ABCA_1B_1C_1$ ուղիղ պրիզմայի ծավալը, եթե $AB=BC$, $\angle ABC=\alpha$, A_1C անկյունագիծը ℓ է և հիմքի հարթության հետ կազմում է β անկյուն:

297. Ուղիղ պրիզմայի հիմքը զուգահեռագիծ է: Հիմքերից մեկի a կողմով և մյուս հիմքի՝ դրան հանդիպակաց կողմով տարված է հատույթ, որը հիմքի հարթության հետ կազմում է β անկյուն: Այդ հատույթի մակերեսը Q է: Գտեք տրված պրիզմայի ծավալը:

298. Գտեք այն կանոնավոր n-անկյուն պրիզմայի ծավալը, որի բոլոր կողերը a են, եթե. ա) $n=3$, բ) $n=4$, գ) $n=6$, դ) $n=8$:

299. Կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայում ստորին հիմքի կողմով և վերին հիմքի՝ դրան հանդիպակաց գագաթով տարված է մի հատույթ, որը հիմքի հարթության հետ կազմում է 60^0 անկյուն: Գտեք այդ պրիզմայի ծավալը, եթե հիմքի կողմը a է:

300. Կանոնավոր վեցանկյուն պրիզմայի ամենամեծ անկյունագիծը 8սմ է և կողմնային կողի հետ կազմում է 30^0 անկյուն: Գտեք պրիզմայի ծավալը:

301. Դիցուք՝ V-ն, r-ը և h-ը գլանի, համապատասխանաբար, ծավալը, շառավիղը և բարձրությունն են: Գտեք. ա) V-ն, եթե $r=2\sqrt{2}$ սմ, $h=3$սմ, բ) r-ը, եթե $V=120$սմ^2, $h=3{,}6$սմ, գ) h-ը, եթե $r=h$, $V=8\pi$սմ^3:

302. 4մմ տրամագծով ալյումինե հաղորդալարի զանգվածը $6{,}8$կգ է: Գտեք հաղորդալարի երկարությունը (ալյումինի խտությունը $2{,}6$գ/սմ^3 է):

303. Ի՞նչ քանակությամբ (տոննաներով) նավթ է տեղավորում գլանաձև ցիստեռնը, որի տրամագիծը 18մ է, բարձրությունը՝ 7մ: Նավթի խտությունը $0{,}85$ գ/սմ^3 է:

304. Գլանի հիմքի մակերեսը Q է, իսկ նրա առանցքային հատույթի մակերեսը՝ S: Գտեք գլանի ծավալը:

305. Կապարե խողովակի (կապարի խտությունը $11{,}4$գ/սմ^3 է) պատերի հաստությունը 4մմ է, ներսի տրամագիծը՝ 13մմ: Որքա՞ն է խողովակի զանգվածը, եթե նրա երկարությունը 25մ է:

306. Գլանին ներգծած է կանոնավոր n-անկյուն պրիզմա: Գտեք պրիզմայի և գլանի ծավալների հարաբերությունը, եթե. ա) $n=3$, բ) $n=4$, գ) $n=6$, դ) $n=8$, ե) n-ը կամայական ամբողջ թիվ է:

307. Գլանին ներգծած պրիզմայի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է, որի էջը a է, իսկ դրան առընթեր անկյունը՝ α: Գտեք գլանի ծավալը, եթե պրիզմայի բարձրությունը h է:

§ 3 Թեք պրիզմայի, բուրգի և կոնի ծավալները

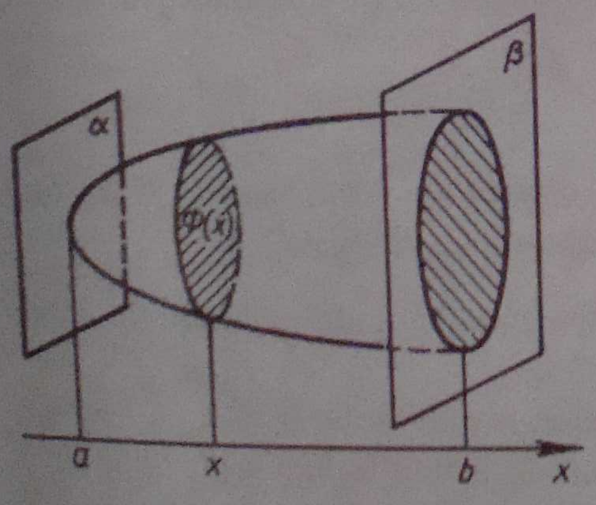
31 Մարմինների ծավալների հաշվումը հաջորդականության սահմանի միջոցով

Դիտարկենք մարմինների ծավալները հաշվելու մի եղանակ, որը հիմնված է հաջորդականության սահմանի հասկացության վրա, ինչը մեզ ծանոթ է հանրահաշվի և մաթեմատիկական անալիզի հիմունքներ դասընթացից:

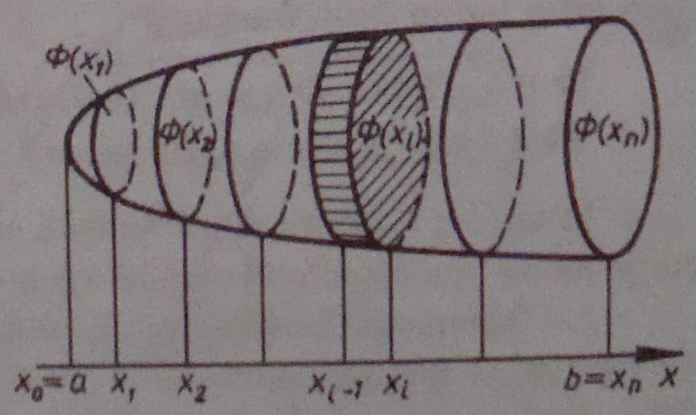
Դիցուք՝ T մարմինը, որի ծավալը հարկավոր է հաշվել, առնված է α և β երկու զուգահեռ հարթությունների միջև, որոնց հեռավորությունը հավասար է h-ի (նկ. 72): Ներմուծենք կոորդինատների համակարգն այնպես, որ Ox առանցքն ուղղահայաց լինի α և β հարթություններին: a և b տառերով նշանակենք Ox առանցքի հետ այդ հարթությունների հատման կետերի աբսցիսները ($a<b$), ընդ որում պարզ է, որ $h=b-a$: Ընդունենք, որ մարմինն այնպիսին է, որ ցանկացած $x\in[a,b]$ աբսցիսն ունեցող կետով անցնող և Ox առանցքին ուղղահայաց հարթությամբ հատելիս նրա $\Phi(x)$ հատույթը կա՛մ շրջան է, կա՛մ բազմանկյուն ($x=a$ կամ $x=b$ դեպքում հատույթը կարող է, մասնավորապես, վերածվել կետի, ինչպես օրինակ՝ $x=a$ դեպքը նկ. 72-ում): $\Phi(x)$ պատկերի մակերեսը նշանակենք $S(x)$ և ընդունենք, որ $S(x)$-ը անընդհատ ֆունկցիա է $[a,b]$ թվային հատվածում:

$[a,b]$ թվային հատվածը $a=x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n=b$ կետերով տրոհենք n թվով հավասար հատվածների և x_i աբսցիսն ունեցող կետերով ($i=1, 2, \ldots, n$) տանենք հարթություն՝ ուղղահայաց Ox առանցքին (նկ. 73): T մարմինը այդ հարթություններով տրոհվում է $T_1, T_2, \ldots, T_n$ մարմինների:

Եթե $\Phi(x_i)$ հատույթը շրջան է, ապա T_i մարմնի (նկ. 73-ում այդ մարմինը ստվերագծված է) ծավալը մոտավորապես հավասար է մի այնպիսի գլանի ծավալի, որի հիմքն է $\Phi(x_i)$ շրջանը, իսկ բարձրությունը՝



Նկ. 72



Նկ. 73

$\frac{h}{n}$-ը: Եթե $\Phi(x_i)$ հատույթը բազմանկյուն է, ապա T_i մարմնի ծավալը մոտավորապես հավասար է մի այնպիսի ուղիղ պրիզմայի ծավալի, որի հիմքն է $\Phi(x_i)$ բազմանկյունը, իսկ բարձրությունը՝ $\frac{h}{n}$-ը:

Թե՛ մեկ, թե՛ մյուս դեպքում T_i մարմնի ծավալը մոտավորապես հավասար է $S(x_i)\cdot\frac{h}{n}$, իսկ ամբողջ T մարմնի V ծավալի մոտավոր մեծության համար ստացվում է.

$$V \approx V_n = \frac{h}{n}\left(S(x_1)+S(x_2)+\ldots+S(x_n)\right):$$

T մարմնի ծավալի V_n մոտավոր արժեքը ավելի ճշգրիտ է այնքան, որքան ավելի մեծ է n թիվը, այսինքն՝ որքան ավելի փոքր է $\frac{h}{n}$ մեծությունը:

Ընդունենք՝ առանց ապացուցելու, որ $\lim\limits_{n\to\infty} V_n$-ը հավասար է T մարմնի ծավալին, այսինքն՝

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{h}{n}\cdot S_n\right), \text{ որտեղ } S_n=S(x_1)+S(x_2)+\ldots+S(x_n):$$

Այն համարենք **ծավալների հաշվման հիմնական բանաձև** և, օգտվելով այդ բանաձևից, հաշվենք մեր ուսումնասիրած մարմինների ծավալները:

Պարզաբանում

Մարմինների ծավալները հաշվելիս հարկավոր է լինում օգտագործել հանրահաշվի դասընթացից հայտնի հետևյալ նույնությունը՝

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}:$$

Այս նույնությունը կարելի է ապացուցել, մասնավորապես, մաթեմատիկական ինդուկցիայի միջոցով:

32. Թեք պրիզմայի ծավալը

Թեորեմ: ***Թեք պրիզմայի ծավալը հավասար է հիմքի մակերեսի և բարձրության արտադրյալին:***

Ապացուցում: Թեորեմն ապացուցենք նախ՝ եռանկյուն պրիզմայի, հետո՝ կամայական պրիզմայի համար:

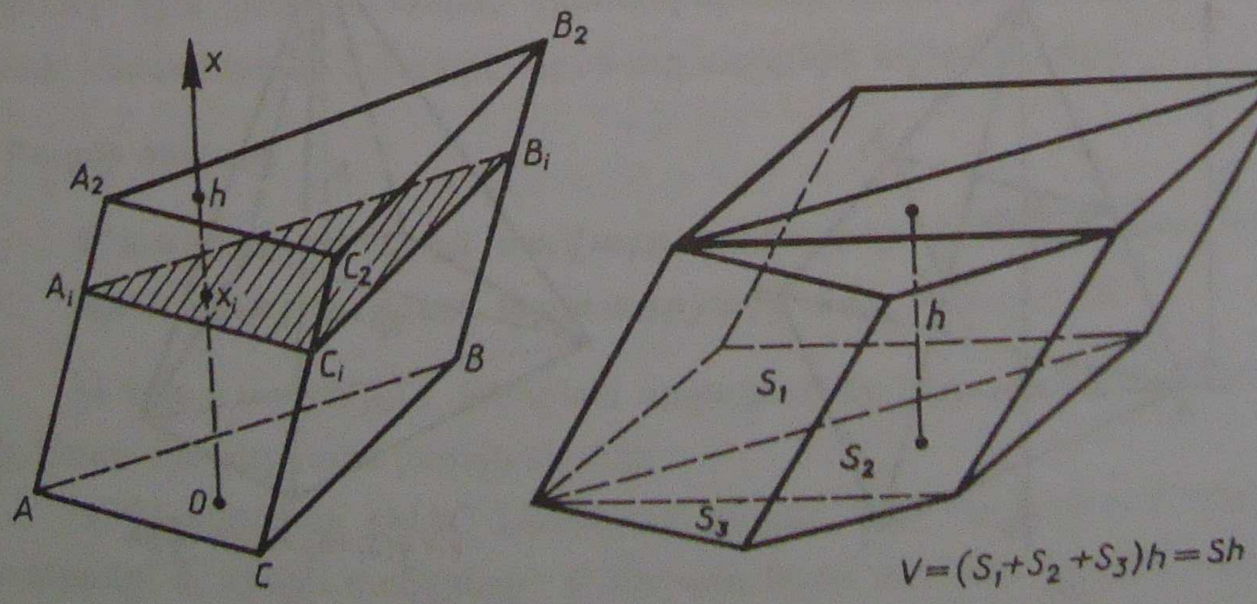
1. Դիտարկենք եռանկյուն պրիզմա, որի ծավալը V է, հիմքի մակերեսը՝ S, իսկ բարձրությունը՝ h: O կետը նշենք պրիզմայի հիմքերից մեկի վրա և Ox առանցքը տանենք հիմքերին ուղղահայաց (նկ. 74,ա): Պրիզմայի h բարձրությունը տրոհենք n թվով հավասար հատվածների և դիտարկենք պրիզմայի հատույթներն այն հարթություններով, որոնք

անցնում են այդ բարձրության տրոհման կետերով և ուղղահայաց են Ox առանցքին (այսինքն՝ զուգահեռ են պրիզմայի հիմքի հարթությանը)։ i-րդ հարթության և Ox առանցքի հատման կետի աբսցիսը նշանակենք x_i, իսկ ստացված հատույթի մակերեսը՝ $S(x_i)$։

Ապացուցենք, որ $S(x_i)$ մակերեսը հավասար է պրիզմայի հիմքի S մակերեսին։ Դրա համար նկատենք, որ ABC եռանկյունը (պրիզմայի հիմքը) և $A_iB_iC_i$ եռանկյունը (պրիզմայի հատույթը) միմյանց հավասար են։ Բանն այն է, որ AA_iB_iB քառանկյունը զուգահեռագիծ է (AA_i և BB_i հատվածները զուգահեռ են և հավասար), ուրեմն՝ $A_iB_i=AB$։ Համանման ձևով ապացուցվում է, որ $B_iC_i=BC$ և $A_iC_i=AC$։ Ստացվում է, որ $A_iB_iC_i$ և ABC եռանկյունները հավասար են՝ ըստ երեք կողմերի։ Հետևաբար՝ $S(x_i)=S$։ Այժմ կիրառենք մարմինների ծավալները հաշվելու հիմնական բանաձևը։ Նկատի ունենանք, որ $S_n=S(x_1)+S(x_2)+\ldots+S(x_n)=nS$, ստանում ենք.

$$V=\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{h}{n}\cdot nS\right)=Sh:$$

2. Այժմ պնդումն ապացուցենք կամայական պրիզմայի համար, որի հիմքի մակերեսը S է, բարձրությունը՝ h։ Այդպիսի պրիզման կարելի է տրոհել ընդհանուր h բարձրություն ունեցող եռանկյուն պրիզմաների (74,բ նկարում ցույց է տրված հնգանկյուն պրիզմայի տրոհումը)։ Եռանկյուն պրիզմաներից յուրաքանչյուրի ծավալն արտահայտենք ըստ 1-ին դեպքում արտածված բանաձևի և այնուհետև այդ ծավալները գումարենք։ Փակագծերից հանելով h ընդհանուր արտադրիչը՝ փակագծերում մնում է եռանկյուն պրիզմաների հիմքերի մակերեսների գումարը, որն էլ սկզբնական պրիզմայի հիմքի S մակերեսն է։ Այսպիսով ստացվում է, որ սկզբնական պրիզմայի ծավալը հավասար է հիմքի մակերեսի և բարձրության արտադրյալին՝ $V=Sh$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել։



ա) բ)

Նկ. 74

Պարզաբանում

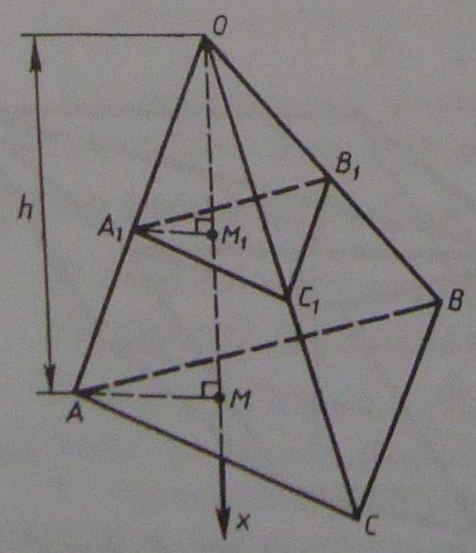
Թեք պրիզմայի համար գոյություն ունի ծավալի հաշվման այլ եղանակ ևս, այն է՝ թեք պրիզմայի ծավալը հավասար է կողմնային կողի և պրիզմայի կողմնային կողերին ուղղահայաց ու դրանց՝ բոլորին հատող հարթությամբ հատույթի մակերեսի արտադրյալին: Այս պնդումը համառոտ ձևակերպվում է այսպես. **թեք պրիզմայի ծավալը հավասար է կողմնային կողի և նրա ուղղահայաց հատույթի մակերեսի արտադրյալին** (տե՛ս խնդիր 322-ը):

33 Բուրգի ծավալը

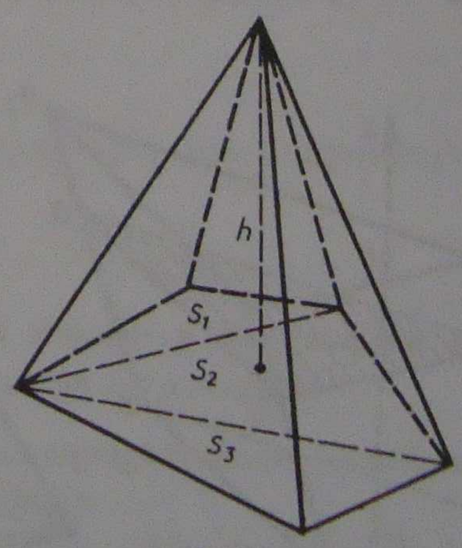
ա. Բուրգի հիմքին զուգահեռ հատույթի հատկությունը

Դիտարկենք $OABC$ եռանկյուն բուրգը, որի հիմքի մակերեսը S է, իսկ OM բարձրությունը հավասար է h-ի: Դիցուք՝ տարված է նրա հիմքին զուգահեռ հարթություն, որը բուրգի գագաթից ունի $OM_1=h_1$ հեռավորություն և բուրգի հետ հատումից առաջացնում է հատույթ՝ $A_1B_1C_1$ եռանկյունը (նկ. 75,ա): Հատույթի մակերեսը նշանակենք S_1 և այն արտահայտենք S-ով, h-ով և h_1-ով:

Նկատենք, որ $A_1B_1C_1$ և ABC եռանկյունները նման են: Իսկապես, $A_1B_1 \| AB$ (պարզաբանեք՝ ինչու), ուրեմն՝ $\Delta OA_1B_1 \sim \Delta OAB$: Հետևաբար՝ $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{OA_1}{OA}$: Նման են նաև OA_1M_1 և OAM ուղղանկյուն եռանկյունները (դրանք ունեն O գագաթով ընդհանուր սուր անկյուն): Ուրեմն՝ $\frac{OA_1}{OA}=\frac{OM_1}{OM}=\frac{h_1}{h}$: Այսպիսով՝ $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{h_1}{h}$: Համանման ձևով ապացուցվում է, որ $\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{h_1}{h}$ և $\frac{C_1A_1}{CA}=\frac{h_1}{h}$: Ստացվում է, որ $A_1B_1C_1$ և ABC



ա)



$V=\frac{1}{3}(S_1+S_2+S_3)h=\frac{1}{3}Sh$

բ)

Նկ. 75

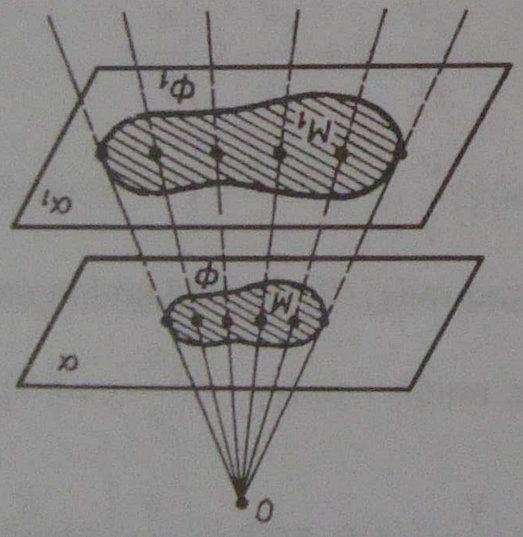
կետերի Φ_1 բազմաճյուղը (նկ. 76)։ Դարձի է ապացուցել, որ Φ_1 պատկերը նման է Φ պատկերին, ընդ որում՝ նմանության գործակիցը հավասար է α և α_1 հարթությունների O կետի ոչեզոք հեռավորությունների հարաբերությանը։ Այդ հատկությունը գործնական ոչ մի կիրառություն։ Օրինակ՝ դրա միջոցով կիմացվի, լուսճկիարչական ապարատի, հեռադիտակի և օպտիկական այլ սարքերի աշխատանքը։

Բ. Բուրգի ծավալը

Թեորեմ։ ***Բուրգի ծավալը հավասար է հիմքի մակերեսի և բարձրության արտադրյալի մեկ երրորդին։***

Ա պ ա ց ո ւ յ ց ։ Թեորեմն ապացուցենք նախ՝ եռանկյուն բուրգի դեպքում։

1. Դիտարկենք $OABC$ եռանկյուն բուրգը, որի ձախլն է V, բարձրությունը՝ h, հիմքի մակերեսը՝ S։ Ox առանցքը տանենք հիմքին ուղղահայաց (տե՛ս նկ. 75,ա, որտեղ OM-ը բուրգի բարձրությունն է)։ Բուրգի h բարձրությունը տրոհենք n բիսի հավասար հատվածների և միտրիեզ Φ_1 պատկերի յուրաքանչյուր M կետից դեպի Φ պատկերի համապատասխան M_1 կետը տանենք OM ուղղի և α հարթության զուգահեռ α_1 հարթություն։ Ստացված հատվածներ ունեն այդ բոլոր ուղղությունները հատման



Նկ. 76

բուրգի հատույթներն այն հարթություններով, որոնք անցնում են բարձրության տրոհման կետերով և ուղղահայաց են Ox առանցքին (այսինքն՝ զուգահեռ են բուրգի հիմքի հարթությանը): i-րդ հարթության և Ox առանցքի հատման M_i կետի աբսցիսը նշանակենք x_i, իսկ ստացված հատույթի մակերեսը՝ $S(x_i)$: $S(x_i)$-ն արտահայտենք S-ով, h-ով և x_i-ով: Օգտվենք բուրգի՝ հիմքին զուգահեռ հատույթի հատկությունից, ստանում ենք.

$\frac{S(x_i)}{S}=\left(\frac{x_i}{h}\right)^2$, կամ $S(x_i)=\frac{S}{h^2}x_i^2$: Նկատի ունենանք, որ $x_i=\frac{i}{n}h$, ուրեմն՝

$S(x_i)=S\cdot\frac{i^2}{n^2}$: Այժմ կիրառենք մարմինների ծավալները հաշվելու հիմնական բանաձևը: Դրա համար նախ որոշենք V_n-ը, ստանում ենք.

$$V_n=\frac{h}{n}(S(x_1)+S(x_2)+\ldots+S(x_n))=$$

$$=\frac{h}{n}\left(S\cdot\frac{1^2}{n^2}+S\cdot\frac{2^2}{n^2}+\ldots+S\cdot\frac{n^2}{n^2}\right)=\frac{hS}{n^3}\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)=$$

$$=\frac{hS}{n^3}\left(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right)=\frac{Sh}{3}+Sh\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right):$$

Այսպիսով՝ $V=\lim\limits_{n\to\infty}V_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{Sh}{3}+Sh\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)\right)=\frac{Sh}{3}$:

2. Այժմ թեորեմն ապացուցենք կամայական բուրգի համար, որի հիմքի մակերեսը S է, բարձրությունը՝ h: Բուրգը կարելի է տրոհել h բարձրություն ունեցող եռանկյուն բուրգերի (75,բ նկարում ցույց է տրված հնգանկյուն բուրգի տրոհումը): Այդ եռանկյուն բուրգերից յուրաքանչյուրի ծավալն արտահայտենք ըստ 1-ին դեպքում արտածված բանաձևի և այդ ծավալները գումարենք: Փակագծերից հանելով $\frac{1}{3}h$ ընդհանուր արտադրիչը՝ փակագծերում ստացվում է եռանկյուն բուրգերի հիմքերի մակերեսների գումարը, որն էլ սկզբնական բուրգի հիմքի S մակերեսն է: Այսպիսով՝ սկզբնական բուրգի ծավալը հավասար է նրա հիմքի մակերեսի և բարձրության արտադրյալի մեկ երրորդին:

Թեորեմն ապացուցված է:

Խնդիր. *h բարձրություն և հիմքերի S և S_1 մակերես-ներ ունեցող հատած բուրգի ծավալը հաշվիրև է*

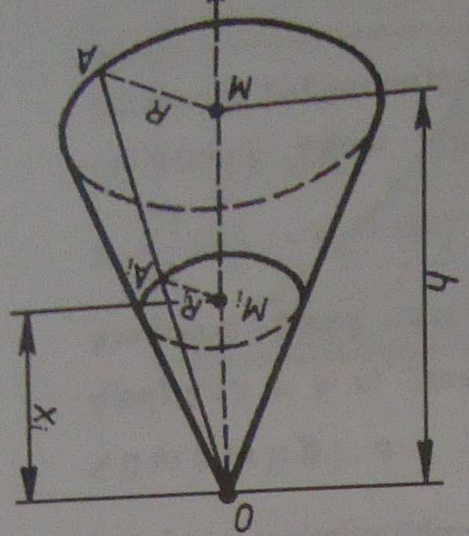
$$V=\frac{1}{3}h\left(S+S_1+\sqrt{SS_1}\right)$$ *բանաձևով:*

Որպեսզի արտածենք այս բանաձևը, նախ նկատենք, որ հատած բուրգ ստացվում է որևէ բուրգից, որից անջատում է S_1 հիմքով բուրգը: Դիցուք անջատված բուրգի բարձրությունը հավասար է x-ի, այդ դեպքում ամբողջ բուրգի բարձրությունը կլինի $h+x$: Հատած բուրգի ծավալը հավասար է սկզբնական բուրգի և նրանից անջատված բուրգի ծավալների տարբերությանը, այսինքն՝

$$V=\frac{1}{3}S(h+x)-\frac{1}{3}S_1x:$$

Այս հավասարության մեջ x-ի փոխարեն տեղադրենք դրա արժեքը՝ արտահայտված **w)** կետի (1) բանաձևից՝ $\frac{S_1}{S}=\left(\frac{x}{x+h}\right)^2$, այնպիսի

$$x=\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}}h:$$



Նկ. 77

34 Հոնի ծավալը

Ընդունենք՝ *հոնի ծավալը հավասար է հիմքի մակերեսի և բարձրության արտադրյալին մեկ երրորդին:*

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ: Դիտարկենք հոն, որի ծավալն է V, շառավիղը՝ R, բարձրությունը՝ h, և գագաթը է O կետը: Ox առանցքը տանենք մեզ արդեն ծանոթ նկարներից մեկի պես, դուրս է տրված եռյուղ 77-ուն (OM-ը հոնի առանցքն է): Դիցուք՝ հոնի բարձրությունը տրոհված է n բազի հավասար հատվածների և տրոհման կետերով տարված են հոնի առանցքին ուղղահայաց (այնինչ՝ հիմքերն ուղղահայաց) հատույթներ: Կոնի՝ առանցքին ուղղահայաց յուրաքանչյուր հատույթը մի շրջան է, որի կենտրոնը Ox առանցքի և հատող հարթու-

Բյուն հատման M_i կետն է (ըստ կետ 19-ի)։ i-րդ հատույթի շրջանի շառավիղը նշանակենք R_i, իսկ մակերեսը՝ $S(x_i)$, որտեղ x_i-ն M_i կետի աբսցիսն է։ OM_iA_i և OMA ուղղանկյուն եռանկյունների նմանությունից հետևում է, որ $\frac{OM_i}{OM}=\frac{R_i}{R}$, կամ $\frac{x_i}{h}=\frac{R_i}{R}$, այսինքն՝ $R_i=\frac{R}{h}x_i$։ Բայց $x_i=\frac{i}{n}h$, ուրեմն՝ $R_i=R\frac{i}{n}$։ Քանի որ $S(x_i)=\pi R_i^2$, ապա $S(x_i)=\pi R^2\frac{i^2}{n^2}$։

Կիրառենք մարմինների ծավալները հաշվելու հիմնական բանաձևը։ Դրա համար նախ որոշենք V_n-ը, ստանում ենք.

$$V_n=\frac{h}{n}\left(S(x_1)+S(x_2)+\ldots+S(x_n)\right)=$$

$$=\frac{h}{n}\left(\pi R^2\cdot\frac{1^2}{n^2}+\pi R^2\cdot\frac{2^2}{n^2}+\ldots+\pi R^2\cdot\frac{n^2}{n^2}\right)=$$

$$=\frac{\pi R^2h}{n^3}\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)=\frac{\pi R^2h}{n^3}\left(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right)=$$

$$=\frac{\pi R^2h}{3}+\pi R^2h\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)\text{։}$$

Այսպիսով՝ $V=\lim\limits_{n\to\infty}V_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\pi R^2h}{3}+\pi R^2h\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)\right)=\frac{\pi R^2h}{3}$։

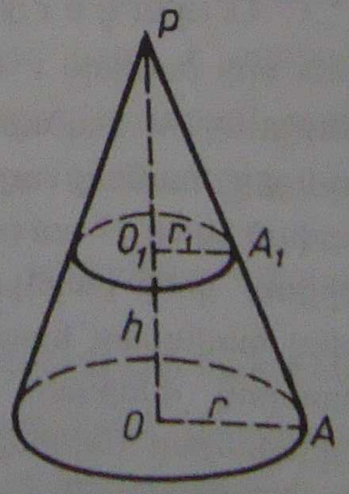
Կոնի հիմքի S մակերեսը հավասար է πR^2, ուրեմն՝ $V=\frac{1}{3}Sh$։

Թեորեմն ապացուցված է։

Հետևանք։ *h բարձրությամբ և հիմքերի r և r_1 շառավիղներ ունեցող հատած կոնի ծավալը հաշվվում է*

$V=\frac{1}{3}\pi h\left(r^2+r_1^2+rr_1\right)$ *բանաձևով*։

Օգտվելով նկար 78-ից՝ այս բանաձևն արտածեք ինքնուրույն։



Նկ. 78

Խնդիրներ

308. Նկար 79-ում ստվարագծված պատկերը պտտվում է Ox առանցքի շուրջը: Գտեք ստացված մարմնի ծավալը:

309. Նկար 80-ում ստվարագծված պատկերը պտտվում է Oy առանցքի շուրջը: Գտեք ստացված մարմնի ծավալը:

310. Նկար 80-ում ստվարագծված պատկերը պտտվում է Ox առանցքի շուրջը: Գտեք ստացված մարմնի ծավալը:

311. Գտեք այն թեք պրիզմայի ծավալը, որի հիմքը 10սմ, 10սմ, 12սմ կողմերով եռանկյուն է, իսկ կողմնային կողը, որը 8սմ է, հիմքի հարթության հետ կազմում է $60°$ անկյուն:

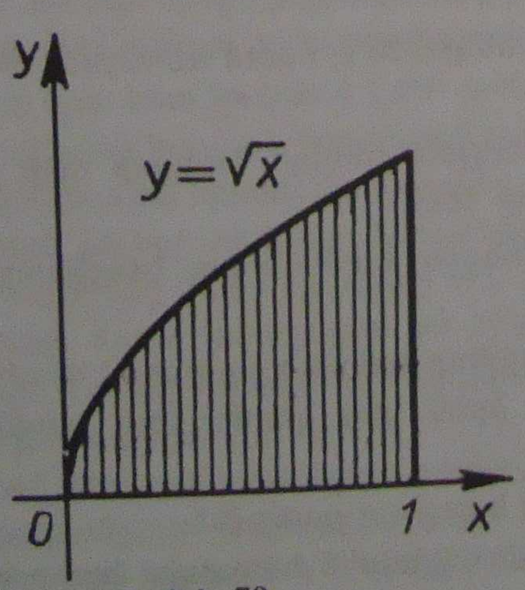
312. Գտեք $ABCA_1B_1C_1$ թեք պրիզմայի ծավալը, եթե $AB=BC=CA=a$, ABB_1A_1-ը շեղանկյուն է, $AB_1<BA_1$, $AB_1=b$, իսկ AB կող ունեցող երկնիստ անկյունը ուղիղ անկյուն է:

313. $ABCA_1B_1C_1$ պրիզմայի հիմքը m կողմով ABC հավասարակողմ եռանկյունն է. A_1 գագաթը պրոյեկտվում է այդ հիմքի կենտրոնին, իսկ AA_1 կողը հիմքի հարթության հետ կազմում է φ անկյուն: Գտեք պրիզմայի ծավալը:

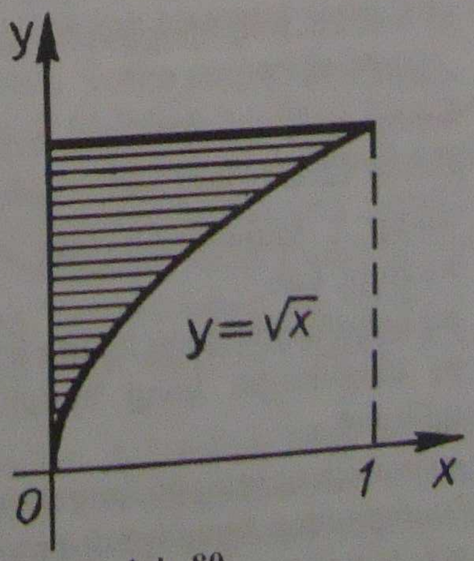
314. $ABCA_1B_1C_1$ թեք պրիզմայի հիմքը ABC ուղղանկյուն եռանկյունն է՝ $AB=7$սմ և $AC=24$սմ էջերով: A_1 գագաթը հավասարապես է հեռացված A, B և C գագաթներից: Գտեք պրիզմայի ծավալը, եթե AA_1 կողը հիմքի հարթության հետ կազմում է $45°$ անկյուն:

315. Թեք զուգահեռանիստի հիմքը քառակուսի է, որի կողմը 1մ է: Կողմնային կողերից մեկը հիմքի՝ իրեն կից յուրաքանչյուր կողի հետ կազմում է $60°$ անկյուն և ունի 2մ երկարություն: Գտեք զուգահեռանիստի ծավալը:

316. Թեք զուգահեռանիստի հիմքը $ABCD$ զուգահեռագիծն է, որում $AB=3$դմ, $AD=7$դմ և $BD=6$դմ: AA_1C_1C անկյունագծային հատույթը,



Նկ. 79



Նկ. 80

որի մակերեսը 1մ^2 է, ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը: Գտեք զուգահեռանիստի ծավալը:

317. Թեք զուգահեռանիստի հիմքը 1դմ և 2դմ կից կողմերով ուղղանկյուն է, իսկ 2դմ երկարությամբ կողմնային կողը հիմքի իրեն կից կողմերի հետ կազմում է 60°-ի անկյուններ: Գտեք. **ա)** այդ կողմնային կողի կազմած անկյունը հիմքի հարթության հետ, **բ)** զուգահեռանիստի ծավալը:

318. Թեք զուգահեռանիստի հիմքը a և b կողմերով ուղղանկյուն է, իսկ c երկարությամբ կողմնային կողը հիմքի իրեն կից կողմերից յուրաքանչյուրի հետ կազմում է φ անկյուն: Գտեք զուգահեռանիստի ծավալը:

319. Զուգահեռանիստի բոլոր նիստերը հավասար շեղանկյուններ են, որոնց անկյունագծերն են 6սմ և 8սմ: Գտեք զուգահեռանիստի ծավալը:

320. Զուգահեռանիստի բոլոր նիստերը հավասար շեղանկյուններ են, որոնց կողմերը a են, սուր անկյունները՝ 60°:Գտեք զուգահեռանիստի ծավալը:

321. Թեք զուգահեռանիստի հիմքը a կողմով և 60°-ի սուր անկյունով $ABCD$ շեղանկյունն է: AA_1 կողը նույնպես a է, և այն AB և AD կողերից յուրաքանչյուրի հետ կազմում է 45° անկյուն: Գտեք զուգահեռանիստի ծավալը:

322. Ապացուցեք, որ թեք պրիզմայի ծավալը հավասար է կողմնային կողի և պրիզմայի կողմնային կողերին ուղղահայաց ու դրանց՝ բոլորին հատող հարթությամբ հատույթի մակերեսի արտադրյալին:

323. Գտեք թեք եռանկյուն պրիզմայի ծավալը, եթե նրա կողմնային կողերի միջև հեռավորություններն են 37սմ, 13սմ և 30սմ, իսկ կողմնային մակերևույթի մակերեսը 480սմ^2 է:

324. Գտեք h բարձրությամբ բուրգի ծավալը, եթե.

ա) h=2մ, իսկ հիմքը 3մ կողմով քառակուսի է,

բ) h=2,2մ, իսկ հիմքը ABC եռանկյունն է, որում AB=20սմ, BC=13,5սմ, $\angle ABC$=30°:

325. Գտեք այն կանոնավոր եռանկյուն բուրգի ծավալը, որի բարձրությունը 12սմ է, իսկ հիմքի կողմը՝ 13սմ:

326. Գտեք ℓ կողմնային կող ունեցող կանոնավոր եռանկյուն բուրգի ծավալը, եթե.

ա) կողմնային կողը հիմքի հարթության հետ կազմում է φ անկյուն,

բ) կողմնային կողը հիմքի՝ իրեն կից կողմի հետ կազմում է α անկյուն,

գ) բուրգի գագաթին հարակից հարթ անկյունը β է:

327. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի գագաթին հարակից հարթ անկյունը φ է, իսկ հիմքի կողմը՝ a: Գտեք բուրգի ծավալը:

328. Գտեք կանոնավոր քառանկյուն բուրգի ծավալը, եթե.

ա) նրա բարձրությունը H է, իսկ հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունը՝ β,

բ) հիմքի կողմը m է, իսկ գագաթին հարակից հարթ անկյունը՝ α:

329. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի կողմնային կողը m է և հիմքի հարթության հետ կազմում է φ անկյուն: Գտեք բուրգի ծավալը:

330. Գտեք կանոնավոր վեցանկյուն բուրգի ծավալը և կողմնային մակերևույթի մակերեսը, եթե նրա կողմնային կողը 13սմ է, իսկ հիմքին ներգծած շրջանագծի տրամագիծը՝ 6սմ:

331. Բուրգի հիմքը ABC հավասարասրուն եռանկյունն է, որում $AB=BC=13$սմ, $AC=10$սմ: Բուրգի կողմնային կողերից յուրաքանչյուրը նրա բարձրության հետ կազմում է $30°$ անկյուն: Հաշվեք բուրգի ծավալը:

332. Բուրգի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է՝ a և b էջերով: Նրա յուրաքանչյուր կողմնային կողը հիմքի հարթությանը թեքված է φ անկյան տակ: Գտեք բուրգի ծավալը:

333. Քառանկյուն բուրգի հիմքը ուղղանկյուն է, որի անկյունագիծը b է, անկյունագծերի կազմած անկյունը՝ α: Կողմնային կողերը հիմքի հարթությանը թեքված են միևնույն անկյան տակ: Գտեք այդ անկյունը, եթե բուրգի ծավալը V է:

334. Բուրգի հիմքը 6սմ կողմով շեղանկյուն է: Հիմքին առընթեր երկնիստ անկյուններից յուրաքանչյուրը $45°$ է: Գտեք բուրգի ծավալը, եթե նրա բարձրությունը 1,5սմ է:

335. Գտեք $SABC$ եռանկյուն բուրգի ծավալը, եթե.

ա) $\angle CAB=90°$, $BC=c$, $\angle ABC=\varphi$, և կողմնային կողերից յուրաքանչյուրը հիմքի հարթության հետ կազմում է θ անկյուն,

բ) $AB=12$սմ, $BC=CA=10$սմ, և հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունները $45°$ են,

գ) կողմնային կողերը զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց են և ունեն a, b, c երկարություններ:

336. $DABC$ բուրգի հիմքը եռանկյուն է, որում $AB=20$սմ, $AC=29$սմ, $BC=21$սմ: DAB և DAC նիստերը ուղղահայաց են հիմքի հարթությանը, իսկ DBC նիստը նրա հետ կազմում է $60°$ անկյուն: Գտեք բուրգի ծավալը:

337. Կանոնավոր հատած եռանկյուն բուրգի հիմքերի կողմերն են a և $0,5a$, իսկ կողմնային նիստի հարթագիծը a է: Գտեք հատած բուրգի ծավալը:

338. Հատած բուրգի հիմքերը հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյուններ են, որոնց ներքնաձիգերը m և n են ($m>n$): Կողմնային նիստերից երկուսը, որոնք ընդգրկում են էջերը, ուղղահայաց են հիմքին, իսկ երրորդ նիստը հիմքի հետ կազմում է φ անկյուն: Գտեք հատած բուրգի ծավալը:

339. Բուրգի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է, որի էջերը 24դմ և 18դմ են: Յուրաքանչյուր կողմնային կողը 25դմ է: Բուրգը հատած է հարթությամբ, որը զուգահեռ է հիմքի հարթությանը և կիսում է կողմնային կողը: Գտեք ստացված հատած բուրգի ծավալը:

340. Կանոնավոր հատած քառանկյուն բուրգի հիմքերի կողմերը 6սմ և 4սմ են: Նրա այն հատույթի մակերեսը, որն առաջանում է մի նիստի չպատկանող երկու կողմնային կողերով անցնող հարթությամբ, հավասար է 15սմ^2: Գտեք հատած բուրգի ծավալը:

341. Դիցուք՝ h-ը, r-ը և V-ն, համապատասխանաբար, կոնի բարձրությունն է, հիմքի շառավիղը և ծավալը: Գտեք.

ա) V-ն, եթե h=3սմ, r=1,5սմ,

բ) h-ը, եթե r=4սմ, V=48πսմ^3,

գ) r-ը, եթե $h=m$, $V=P$:

342. Կոնի բարձրությունը 5սմ է: Գագաթից 2սմ հեռավորության վրա այն հատվում է հիմքին զուգահեռ հարթությամբ: Գտեք սկզբնական կոնի ծավալը, եթե այդ հատումից ստացված փոքր կոնի ծավալը 24սմ^3 է:

343. Գտեք կոնի ծավալը, եթե հիմքի մակերեսը Q է, իսկ կողմնային մակերևույթի մակերեսը՝ P:

344. Կոնի բարձրությունը հավասար է հիմքի տրամագծին: Գտեք կոնի ծավալը, եթե բարձրությունը H է:

345. Գտեք կոնի ծավալը, եթե ծնորդը 13սմ է, իսկ առանցքային հատույթի մակերեսը՝ 60սմ^2:

346. Կոնի բարձրությունը 12սմ է, իսկ ծավալը՝ 324πսմ^3: Գտեք այն սեկտորի անկյունը, որը կառաջանա, եթե կոնի կողմնային մակերևույթը փռեն հարթության վրա:

347. Կոնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը 45πդմ^2 է: Կոնի կողմնային մակերևույթի փռվածքը հարթության վրա սեկտոր է, որի անկյունը 60° է: Գտեք կոնի ծավալը:

348. Հատած կոնի հիմքերի շառավիղները 3մ և 6մ են, իսկ ծնորդը 5մ է: Գտեք հատած կոնի ծավալը:

349. Հայտնի են հատած կոնի h բարձրությունը, ℓ ծնորդը, կողմնային մակերևույթի S մակերեսը: Գտեք հատած կոնի առանցքային հատույթի մակերեսը և ծավալը:

350. Հատած կոնի հիմքերի շառավիղներն ու ծնորդը հարաբերում են, ինչպես 4:11:25, իսկ ծավալը 181πմ^3 է: Գտեք հիմքերի շառավիղները և ծնորդը:

351. Հատած կոնի և գլանի բարձրություններն ու ծավալները հավասար են: Գտեք գլանի հիմքի շառավիղը, եթե հատած կոնի հիմքերի շառավիղները 3սմ և 5սմ են:

352. Հատած կոնի բարձրությունը 18սմ է, իսկ հիմքերի շառավիղները 5սմ և 11 սմ են: Բարձրությունը հիմքերին զուգահեռ երկու հարթություններով տրոհված է երեք հավասար հատվածների: Գտեք հատած կոնի ստացված մասերի ծավալները:

353. Հատած կոնի հիմքերի շառավիղները 3սմ և 9սմ են, իսկ բարձրությունը 6սմ է: Այդ հատած կոնից զատված են ընդհանուր գագաթով երկու այնպիսի կոներ, որոնց հիմքերը սկզբնական հատած կոնի հիմքերն են, իսկ մեկի ծնորդները մյուսի ծնորդների շարունակություններն են: Գտեք ստացված կոներից յուրաքանչյուրի ծավալը:

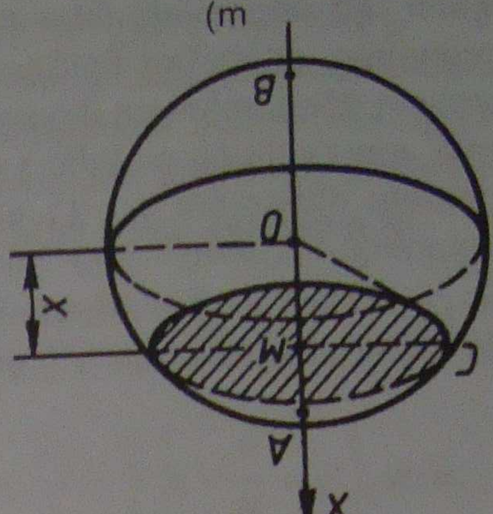
§ 4 Գնդի ծավալը և գնդային մասերի մակերույթի մակերեսը

35 Գնդի ծավալը

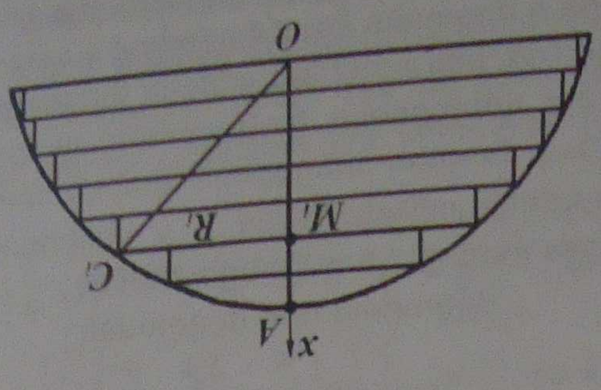
Թեորեմ. *R շառավղով գնդի ծավալը հավասար է $\frac{4}{3}\pi R^3$:*

Ա պ ա գ ո ւ յ ց ։ Դիտարկենք R շառավղով գունդ, որի կենտրոնը O կետն է: Հարթությունը, որն ացցուած է գնդի կեցտրոնով, այդ գունդը տրոհում է երկու հաւասար կասեցների՝ կիսագնդերի: Որեմն՝ բաւական է որոշել կիսագնդերից մեկի V_0 ծավալը, և որոնած կարող ենք որոշել ամբողջ գնդի V ծավալը:

Ox առանցքը տանենք կիսագնդի հիմքին ուղղահայաց (նկ.81-ում Ox առանցքը ընդգրկուած է OA շառավղը, որն ուղղահայաց է կիսագնդի հիմքին): Դիցուք՝ կիսագնդի հիմքին ուղղահայաց շառավղով տրուած է n բիսի հաւասար հատուածներով և տրուած կետերում եանք Ox առանցքին ուղղահայաց (այսինքն՝ կիսագնդի հիմքին զուգահեռ) հատուածներ (81,բ նկարում պատկերված են կիսագնդի հատուածները որոշող): Այդ հատուածները շրջանագծեր են, որոց կեցտրոնները կիսագնդի հիմքին ուղղահայաց շառավղով տրոհում են: i-րդ հատուածի շրջանի շառավիղը R_i (81,բ նկարում $R_i=M_iC_i$), իսկ նրա մակերեսը



ա)



բ)

Նկ. 81

նախ որոշենք V_n-ը, ստանում ենք.

$$V_n=\frac{R}{n}(S(x_1)+S(x_2)+\ldots+S(x_n))=$$

$$=\frac{R}{n}\left(\pi R^2\left(1-\frac{1^2}{n^2}\right)+\pi R^2\left(1-\frac{2^2}{n^2}\right)+\ldots+\pi R^2\left(1-\frac{n^2}{n^2}\right)\right)=$$

$$=\frac{\pi R^3}{n}\left(n\cdot 1-\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2}\right)=\frac{\pi R^3}{n}\left(n-\frac{\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}}{n^2}\right)=$$

$$=\pi R^3\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}\right)=\frac{2}{3}\pi R^3-\pi R^3\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right):$$

Այսպիսով՝ $V_0=\lim\limits_{n\to\infty}V_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\pi R^3-\pi R^3(\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2})\right)=\frac{2}{3}\pi R^3$:

Քանի որ գնդի ծավալը կրկնակի մեծ է կիսագնդի ծավալից, ուրեմն՝ $V=2V_0=\frac{4}{3}\pi R^3$: Թեորեմն ապացուցված է:

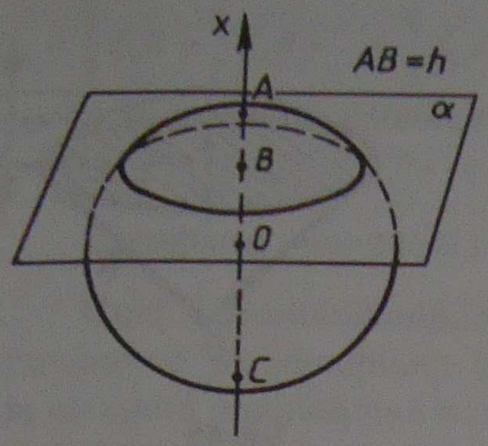
36 Գնդային սեգմենտի, գնդային շերտի և գնդային սեկտորի ծավալները

ա) Գնդային սեգմենտ կոչվում է գնդի այն մասը, որը նրանից անջատվում է հատող հարթությամբ: Նկար 82-ում B կետով անցնող α հարթությունը տրոհում է գունդը երկու գնդային սեգմենտների: Հատույթում ստացված շրջանը կոչվում է այդ սեգմենտներից յուրաքանչյուրի **հիմք,** իսկ հատող հարթությանն ուղղահայաց AC տրամագծի AB և CB հատվածները կոչվում են սեգմենտների **բարձրություններ:**

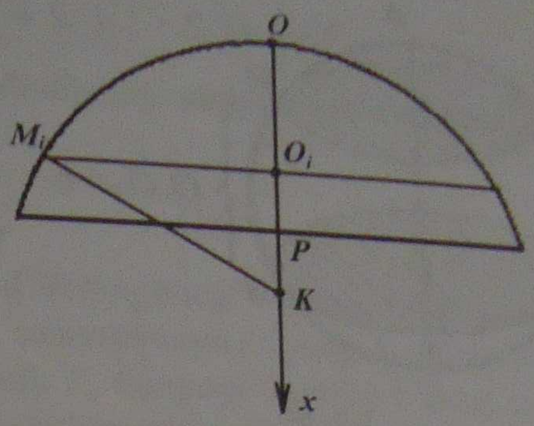
Եթե գնդի շառավիղը R է, իսկ գնդային սեգմենտի բարձրությունը՝ h (նկար 82-ում $h=AB$), ապա այդ գնդային սեգմենտի ծավալը հաշվում են $V=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)$ բանաձևով:

Արտածենք այս բանաձևը:

Դիցուք՝ գնդային սեգմենտն անջատված է K կենտրոնով գնդից, որի շառավիղը R է, իսկ գնդային սեգմենտի բարձրությունը՝ h (նկար 83-ում ուրվագծված սեգմենտի համար $h=OP$, որտեղ O-ն գնդային սեգմենտի հիմքին ուղղահայաց տրամագծի ծայրակետն է): Ox առանցքը տանենք սեգմենտի հիմքին ուղղահայաց, ինչպես ցույց է տրված նկար 83-ում: Սեգմենտի h բարձրությունը տրոհենք n բվով հավասար հատվածների և տրոհման կետերով տանենք Ox առանցքին ուղղահայաց (այսինքն՝ սեգմենտի հիմքին զուգահեռ) հատույթներ: Այդ հատույթները շրջաններ են, որոնց կենտրոնները սեգմենտի բարձրության տրոհման կետերն են: i-րդ հատույ-



Նկ. 82



Նկ. 83

քի շառավիղը նշանակենք R_i, իսկ նրա մակերեսը՝ $S(x_i)$, որտեղ x_i-ն այդ շրջանի O_i կենտրոնի աբսցիսն է և հավասար է $\frac{i}{n}h$-ի: $S(x_i)$-ն արտահայտենք R-ով, h-ով և x_i-ով: KO_iM_i ուղղանկյուն եռանկյունից որոշում ենք.

$R_i^2 = R^2 - (R - x_i)^2 = 2Rx_i - x_i^2 = 2Rh\frac{i}{n} - h^2\frac{i^2}{n^2}$: Քանի որ $S(x_i) = \pi R_i^2$, ապա $S(x_i) = \pi\left(2Rh\frac{i}{n} - h^2\frac{i^2}{n^2}\right) = \frac{\pi h}{n}\left(2Ri - \frac{hi^2}{n}\right)$:

Կիրառենք մարմինների ծավալները հաշվելու հիմնական բանաձևը: Դրա համար նախ որոշենք V_n-ը, ստանում ենք.

$$V_n = \frac{h}{n}\cdot\frac{\pi h}{n}\cdot\left(\left(2R - h\cdot\frac{1^2}{n}\right) + \left(2R\cdot 2 - h\cdot\frac{2^2}{n}\right) + \ldots + \left(2R\cdot n - h\cdot\frac{n^2}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi h^2}{n^2}\left(2R(1+2+\ldots+n) - \frac{h}{n}\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)\right) =$$

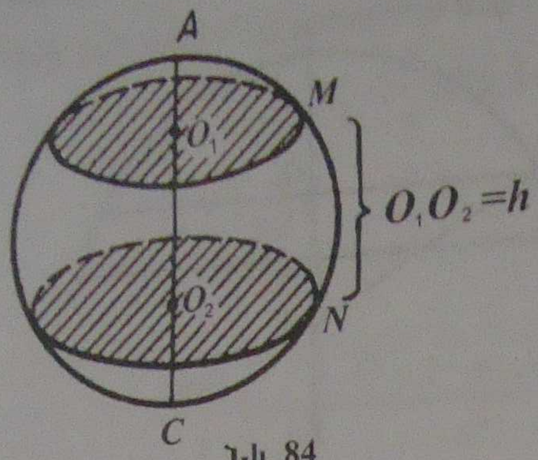
$$= \frac{\pi h^2}{n^2}\left(2R\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{h}{n}\left(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right)\right) =$$

$$= \pi h^2\left(R + \frac{R}{n} - h\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)\right) = \pi h^2\left(\left(R - \frac{h}{3}\right) + \left(\frac{R}{n} - \frac{h}{2n} - \frac{h}{6n^2}\right)\right):$$

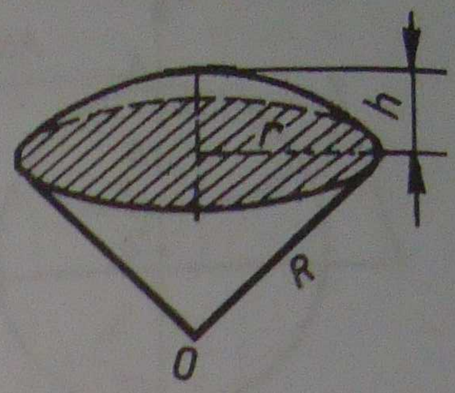
Այսպիսով՝ $V = \lim\limits_{n\to\infty} V_n = \lim\limits_{n\to\infty} \pi h^2\left(\left(R - \frac{h}{3}\right) + \left(\frac{R}{n} - \frac{h}{2n} - \frac{h}{6n^2}\right)\right) = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$:

բ) Գնդային շերտ կոչվում է գնդի այն մասը, որն առնված է գունդը հատող երկու զուգահեռ հարթությունների միջև (նկ.84): Հարթությունների հատումից ստացված շրջանները կոչվում են գնդային շերտի **հիմքեր,** իսկ այդ հարթությունների միջև հեռավորությունը՝ գնդային շերտի **բարձրություն**:

Գնդային շերտի ծավալը կարելի է հաշվել որպես երկու գնդային սեգմենտների ծավալների տարբերություն: Օրինակ՝ նկար 84-ում պատ-



Նկ. 84



Նկ. 85

կերված գնդային շերտի ծավալը հավասար է այն երկու գնդային սեգմենտների ծավալների տարբերությանը, որոնց բարձրություններն են AO_2 և AO_1 հատվածները:

գ) Գնդային սեկտոր կոչվում է այն մարմինը, որն առաջանում է 90°-ից փոքր աղեղով շրջանային սեկտորի պտտումից մի ուղղի շուրջը, որն ընդգրկում է այդ շրջանային սեկտորը սահմանափակող շառավիղներից մեկը (նկ.85): Գնդային սեկտորը կազմված է միևնույն հիմքն ունեցող գնդային սեգմենտից և կոնից: Եթե գնդի շառավիղը R է, իսկ գնդային սեգմենտի բարձրությունը՝ h, ապա գնդային սեկտորի V ծավալը հաշվում են $V=\frac{2}{3}\pi R^2 h$ բանաձևով:

Այդ բանաձևն արտածեք ինքնուրույն:

Պարզաբանում: Գունդը կարելի է դիտել, մասնավորապես, որպես այնպիսի գնդային սեգմենտ, որի բարձրությունը հավասար է նրա տրամագծին: Այդ առումով՝ գնդի ծավալի բանաձևը կարելի է դիտել որպես գնդային սեգմենտի ծավալի բանաձևի մասնավոր դեպք, երբ $h=2R$:

37 Գնդային մակերևույթի մակերեսը

Դասագրքի կետ 26-ում, առանց ապացուցելու, տրվել է R շառավիղով գնդային մակերևույթի S մակերեսը հաշվելու $S=4\pi R^2$ բանաձևը: Այժմ արտածենք այս բանաձևը՝ օգտվելով գնդի ծավալի բանաձևից:

Դիտարկենք R շառավիղով և O կենտրոնով գնդային մակերևույթ, որին արտագծած է n թվով նիստեր ունեցող բազմանիստ: Դրա նիստերը կամայական կարգով համարակալենք և i-րդ նիստի ($i=1,2,\ldots,n$) մակերեսը նշանակենք S_i: Գնդի O կենտրոնը հատվածներով միացնենք բազմանիստի նիստերի բոլոր գագաթներին: Ստացվում են O ընդհանուր գագաթ ունեցող n թվով բուրգեր, որոնց հիմքերը գնդին արտագծած բազմանիստի նիստերն են: Այդ բուրգերի բարձրությունները գնդի այն շառավիղներն են, որոնք տարված են գնդային մակերևույթի հետ բազմանիստի նիստերի շոշափման կետերին: Հետևաբար՝ i-րդ բուրգի ծավալը հավասար է $\frac{1}{3}S_i R$, իսկ արտագծած բազմանիստի ամբողջ V_n ծավալը հավասար է.

$$V_n=\frac{1}{3}S_1R+\frac{1}{3}S_2R+\ldots+\frac{1}{3}S_nR=\frac{1}{3}R(S_1+S_2+\ldots+S_n)=\frac{1}{3}RP_n,$$

որտեղ P_n-ը գնդին արտագծած բազմանիստի մակերևույթի մակերեսն է՝ $P_n=S_1+S_2+\ldots+S_n$:

Այսպիսով՝ ստացվում է $P_n=\frac{3V_n}{R}$: (1)

Այժմ անսահմանափակ կերպով մեծացնենք n-ը այնպես, որ գնդին արտագծած բազմանիստի նիստերի առավելագույն չափսը ձգտի զրոյի: Այդ դեպքում արտագծած բազմանիստի V_n ծավալը ձգտում է գնդի ծավալին: Իսկապես, եթե արտագծած բազմանիստի յուրաքանչյուր նիստի առավելագույն չափսը չի գերազանցում, ասենք՝ δ-ն, ապա արտագծած բազմանիստն իր ներքին ընդգրկվում է $R+\delta$ շառավիղով և նույն O կենտրոնով գնդի մեջ: Մյուս կողմից՝ արտագծած բազմանիստ մարմինն իր մեջ ընդգրկում է R շառավիղով սկզբնական գունդը: Ուրեմն՝

$$\frac{4}{3}\pi R^3<V_n<\frac{4}{3}\pi(R+\delta)^3:$$

Քանի որ $\delta\to0$ դեպքում $\frac{4}{3}\pi(R+\delta)^3\to\frac{4}{3}\pi R^3$, ապա նաև $V_n\to\frac{4}{3}\pi R^3$, եթե $\delta\to0$ ($n\to\infty$):

Կատարելով սահմանային անցում (1) հավասարության մեջ, ստանում ենք.

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3V_n}{R}=\frac{3}{R}\lim_{n\to\infty}V_n=\frac{3}{R}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=4\pi R^2:$$

Ըստ գնդային մակերևույթի մակերեսի սահմանման՝ $S=\lim_{n\to\infty}P_n$, հետևաբար՝ $S=4\pi R^2$:

Հետևանք: ***Գնդային մակերևույթի մակերեսը հավասար է նրա մեծ շրջանագծի և տրամագծի երկարությունների արտադրյալին:***

38 *Սեգմենտային մակերևույթ և գնդային գոտի

Ինչպես գիտենք, գունդը հարթությամբ հատելիս տրոհվում է երկու մասի, որոնցից յուրաքանչյուրը կոչվում է գնդային սեգմենտ: Նմանապես՝ գնդային մակերևույթը հարթությամբ հատելիս տրոհվում է երկու մասի, որոնցից յուրաքանչյուրը կոչվում է **սեգմենտային մակերևույթ** (տե՛ս նկ.82): Հատույթում առաջանում է շրջանագիծ, ընդ որում՝ գնդային մակերևույթի այն տրամագիծը, որն ուղղահայաց է հատող հարթությանը, անցնում է այդ շրջանագծի կենտրոնով: Գնդային մակերևույթի՝ հատույթի հարթությանն ուղղահայաց տրամագծի այն հատվածը, որն ընկած է հարթության և սեգ-

* Այս կետի նյութը նախատեսվում է ծանոթացման նպատակով:

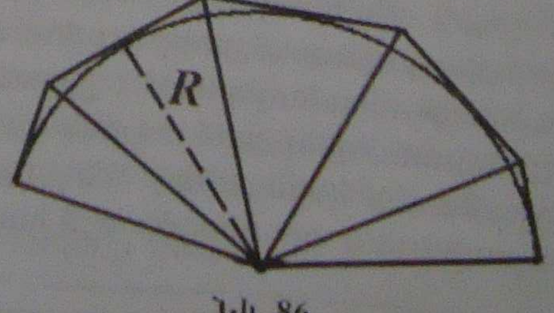
մենտային մակերևույթի միջև, կոչվում է **սեգմենտային մակերևույթի բարձրություն** (նկ.82-ում սեգմենտային մակերևույթների բարձրությունները են AB և CB հատվածները): Կարելի է համոզվել, որ սեգմենտային մակերևույթի բարձրությունը այն բոլոր հատվածների մեծագույնն է, որոնք այդ մակերևույթի կետերից տարված են հատող հարթությանն ուղղահայաց:

Այժմ դիտարկենք մեկ այլ պատկեր: Դիցուք գնդային մակերևույթը հատում են երկու զուգահեռ հարթություններ: Այդ դեպքում գնդային մակերևույթը տրոհվում է երեք մասի: Մասերից երկուսը սեգմենտային մակերևույթներ են: Գնդային մակերևույթի այն մասը, որն առնված է հատող երկու զուգահեռ հարթությունների միջև, կոչվում է **գնդային գոտի** (տե՛ս նկ.84): Այդ հարթությունների միջև հեռավորությունը կոչվում է **գնդային գոտու բարձրություն** (նկ.84-ում այդ բարձրությունը հավասար է O_1O_2 հատվածին, որտեղ O_1-ը և O_2-ը հատույթների շրջանագծերի կենտրոններն են):

Սեգմենտային մակերևույթը և գնդային գոտին կարող են դիտվել որպես պտտման մակերևույթներ: Այսպես, եթե $AMNC$ կիսաշրջանագիծը AC տրամագծի շուրջը պտտվելիս առաջացնում է գնդային մակերևույթ, ապա նույն տրամագծի շուրջը պտտվելիս AM աղեղն առաջացնում է սեգմենտային մակերևույթ, իսկ MN աղեղը՝ գնդային գոտի (տե՛ս նկ.84):

Արտածենք սեգմենտային մակերևույթի և գնդային գոտու մակերեսների բանաձևերը:

1. Սեգմենտային մակերևույթի մակերեսի բանաձևը կարելի է արտածել այն եղանակով, ինչից օգտվեցինք գնդային մակերևույթի մակերեսի համար: Քննության առնենք նախ այն դեպքը, երբ սեգմենտային մակերևույթի բարձրությունը փոքր է գնդի շառավիղից: Դիցուք R շառավիղով գնդային մակերևույթից հատած է h բարձրությամբ սեգմենտային մակերևույթ ($h<R$): Դիտարկենք R շառավիղով այն գնդային սեկտորը, որի ընդգրկած գնդային սեգմենտի բարձրությունը h է (տե՛ս նկ.85): Պատկերացնենք, որ այդ գնդային սեկտորը տրոհված է n թվով մասերի այնպես, որ մասերից յուրաքանչյուրն ընդգրկված է մի այնպիսի բուրգի մեջ, որի գագաթը գնդի O կենտրոնն է, իսկ հիմքը շոշափում է տվյալ սեգմենտային մակերևույթը (նկար 86-ում պատկերված է այդպիսի սեկտորի ուրվագիծը): Այդ բուրգերը որևէ կարգով համարակալենք և i-րդ բուրգի հիմքի մակերեսը ($i=1, 2, \ldots, n$) նշանակենք S_i: Բուրգերից յուրաքանչյուրի բարձրությունը գնդի այն շառավիղն է, որը տարված է բուրգի հիմքի ու գնդային մակերևույթի շոշափման կետին: Ուրեմն՝ i-րդ բուրգի ծավալը հավասար է $\frac{1}{3}RS_i$, իսկ բոլոր բուրգերի միավորումից ստացված բազ-



Նկ. 86

մանիստի V_n ծավալը որոշվում է այսպես.

$$V_n=\frac{1}{3}RS_1+\frac{1}{3}RS_2+\ldots+\frac{1}{3}RS_n=\frac{1}{3}R(S_1+S_2+\ldots+S_n)=\frac{1}{3}RP_n,$$

որտեղ P_n-ը բուրգերի հիմքերի մակերեսների գումարն է:

Այսպիսով ստացվում է $P_n=\frac{3V_n}{R}$: (1)

Այժմ անսահմանափակ կերպով մեծացնենք n-ը այնպես, որ բուրգերի հիմքերի առավելագույն չափսը ձգտի զրոյի: Այդ դեպքում բազմանիստ մարմնի V_n ծավալը ձգտում է գնդային սեկտորի V ծավալին, իսկ P_n-ը ձգտում է սեգմենտային մակերևույթի S մակերեսին: (1) հավասարության մեջ կատարելով սահմանային անցում, $\lim\limits_{n\to\infty}V_n=V$, և $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=S$, ստացվում է $S=\frac{3V}{R}$: Բայց, ինչպես գիտենք, գնդային սեկտորի համար $V=\frac{2}{3}\pi R^2h$, ուրեմն $S=\frac{3}{R}\cdot\frac{2}{3}\pi R^2h=2\pi Rh$:

Այժմ քննության առնենք $h>R$ դեպքը: Այդպիսի սեգմենտային մակերևույթի մակերեսը կարող ենք դիտել որպես գնդային մակերևույթի և $h_1=2R-h$ բարձրությամբ սեգմենտային մակերևույթի մակերեսների տարբերություն, ընդ որում $h_1<R$: Ստացվում է.

$S=4\pi R^2-2\pi R(2R-h)=2\pi Rh$:

Թե՛ մեկ, թե՛ մյուս դեպքում արդյունքում ստացվում է $S=2\pi Rh$ բանաձևը (նկատենք, որ այդ նույն բանաձևն է ստացվում նաև, երբ $h=R$, այսինքն՝ երբ դիտում ենք կիսագնդի սեգմենտային մակերևույթը): Այսպիսով՝ ***R* շառավիղով գնդային մակերևույթից հատած *h* բարձրությամբ սեգմենտային մակերևույթի մակերեսը հավասար է $2\pi Rh$:**

2. Գնդային գոտու մակերևույթի մակերեսի բանաձևը կարելի է արտածել՝ օգտվելով գնդային մակերևույթի և սեգմենտային մակերևույթի մակերեսների բանաձևերից:

Դիցուք՝ R շառավիղով գնդային մակերևույթից հատած է h բարձրությամբ գնդային գոտի: Գնդային մակերևույթը կարող ենք դիտել որպես տվյալ գնդային գոտու և երկու սեգմենտային մակերևույթների միավորում (տե՛ս նկ. 84): Սեգմենտային մակերևույթներից մեկի բարձրությունը նշանակենք h_1, մյուսինը՝ h_2, այդ դեպքում $h_1+h+h_2=2R$, այսինքն՝ $h=2R-h_1-h_2$ (նկ. 84-ում $h_1=AO_1$, $h_2=CO_2$, $h=O_1O_2$):

Այսպիսով՝ $S=4\pi R^2-2\pi Rh_1-2\pi Rh_2=2\pi R(2R-h_1-h_2)=2\pi Rh$, այսինքն՝

$$\boldsymbol{S=2\pi Rh}:$$

Պարզաբանում: Սեգմենտային մակերևույթը կարելի է դիտել որպես գնդային գոտու այնպիսի մասնավոր դեպք, երբ զուգահեռ հարթություններից մեկը շոշափում է գնդային մակերևույթը (հիշենք, որ գնդա-

յին մակերևույթն իր հերթին կարող էր դիտվել որպես սեգմենտային մակերևույթի մասնավոր դեպք, երբ $h=2R$): Նկարագրված համանմանությունը հաստատում է նաև այն փաստը, որ այդ մակերևույթների մակերեսների բանաձևերն ունեն հենց նույն տեսքը:

Վերջում նշենք, որ նկատի ունենալով, որ $2\pi R$-ը գնդի մեծ շրջանագծի երկարությունն է, կարող ենք ձևակերպել, որ **գնդային գոտու (սեգմենտային մակերևույթի) մակերեսը հավասար է նրա բարձրության և գնդի մեծ շրջանագծի երկարության արտադրյալին:**

Հարցեր և խնդիրներ

354. Դիցուք՝ V-ն R շառավիղով գնդի ծավալն է, իսկ S-ը՝ նրա մակերևույթի մակերեսը: Գտեք. **ա)** S-ը, և V-ն, եթե $R=4$սմ, **բ)** R-ը և S-ը, եթե $V=113{,}04$սմ^3, **գ)** R-ը և V-ն, եթե $S=64\pi$սմ^2:

355. Լուսնի տրամագիծը կազմում է (մոտավորապես) Երկրի տրամագծի քառորդ մասը: Համեմատեք Լուսնի և Երկրի ծավալները՝ դրանք համարելով գնդեր:

356. Գունդը և գլանը ունեն հավասար ծավալներ, իսկ գնդի տրամագիծը հավասար է գլանի հիմքի տրամագծին: Գլանի բարձրությունն արտահայտեք գնդի շառավիղով:

357. Պաղպաղակի կոնաձև բաժակի խորությունը 12սմ է, իսկ վերին եզրագծի տրամագիծը՝ 5սմ: Նրա վերևում տեղավորեցին երկու գդալ պաղպաղակ՝ 5սմ տրամագծով կիսագնդի տեսքով: Պաղպաղակը կլցնի՞, արդյոք, բաժակը, եթե այն հալվի:

358. 2,5սմ տրամագծով գլանաձև չափանոթը ջրով լցված է մինչև որոշ մակարդակ, և նրա մեջ ընկղմում են 1սմ տրամագծով 4 հավասար մետաղագնդեր: Որքանո՞վ կփոխվի ջրի մակարդակը չափանոթում:

359. Քանի՞ խորանարդ մետր հող կպահանջվի, որպեսզի պատրաստեն մի թումբ, որն ունենա 5մ հիմքի շառավիղով և 60սմ բարձրությամբ գնդային սեգմենտի ձև:

360. Երկու հավասար գնդեր դասավորված են այնպես, որ մեկի կենտրոնն ընկած է մյուսի մակերևույթի վրա: Գնդերի ընդհանուր մասի ծավալը ինչպե՞ս է հարաբերում մի գնդի ծավալին:

361. Գտեք գնդային սեգմենտի ծավալը, եթե նրա հիմքի շրջանագծի շառավիղը 60սմ է, իսկ գնդի շառավիղը՝ 75սմ:

362. Գնդի տրամագիծը տրոհված է երեք հավասար մասերի, և տրոհման կետերով տարված են հարթություններ՝ ուղղահայաց այդ տրամագծին: Գտեք ստացված գնդային գոտու ծավալը, եթե գնդի շառավիղը R է:

363. Տարված է հարթություն, որն ուղղահայաց է գնդի տրամագծին և այն տրոհում է 6սմ և 12սմ մասերի: Գտեք գնդի ստացված մասերի ծավալները:

364. Գտեք գնդային սեկտորի ծավալը, եթե համապատասխան գնդային սեգմենտի հիմքի շրջանագծի շառավիղը 60սմ է, իսկ գնդի շառավիղը՝ 75սմ:

365. 30^0 անկյունով և R շառավիղով շրջանային սեկտորը պտտվում է իրեն սահմանափակող շառավիղներից մեկի շուրջը: Գտեք ստացված գնդային սեկտորի ծավալը:

366. Ջուրը ծածկում է երկրագնդի մակերևույթի մոտավորապես $\frac{3}{4}$-ը: Քանի՞ քառակուսի կիլոմետրն է երկրագնդի ցամաքի մակերևույթը (Երկրի շառավիղը համարել 6375կմ):

367. Որքա՞ն կաշի կօգտագործվի 10սմ շառավիղով ֆուտբոլի գնդակի երեսքաշի համար (կարերի համար ավելացնել գնդակի մակերևույթի մակերեսի 8%-ը):

368. Ապացուցեք, որ գնդային մակերևույթի մակերեսը հավասար է այն կոնի լրիվ մակերևույթի մակերեսին, որի բարձրությունը հավասար է գնդային մակերևույթի տրամագծին, իսկ հիմքի տրամագիծը՝ կոնի ծնորդին:

369. Ապացուցեք, որ քառակուսու՝ իր կողմերից մեկի շուրջը պտտումից առաջացած մակերևույթի մակերեսը հավասար է այն գնդային մակերևույթի մակերեսին, որի շառավիղը հավասար է այդ քառակուսու կողմին:

370. Գնդային գոտու հիմքերի շառավիղները 20մ և 24մ են, իսկ գնդի շառավիղը՝ 25մ: Գտեք գնդային գոտու մակերեսը (դիտարկել երկու դեպք):

371. Գնդի շառավիղը 15սմ է: Գտեք նրա մակերևույթի այն մասի մակերեսը, որը տեսանելի է գնդի կենտրոնից 25սմ հեռավորություն ունեցող կետից:

372. R շառավիղով գնդի կենտրոնից ի՞նչ հեռավորություն պետք է ունենա լուսատու կետը, որպեսզի լուսավորի գնդային մակերևույթի $\frac{1}{3}$ մասը:

Հարցեր գլուխ III-ի վերաբերյալ

1. Ի՞նչ առնչությամբ են կապված P_1 և P_2 մարմինների V_1 և V_2 ծավալները, եթե. **ա)** P_1 մարմինն ընդգրկված է P_2 մարմնում, **բ)** P_1 և P_2 մարմիններից յուրաքանչյուրը կազմված է 1ամ կող ունեցող n քվով խորանարդներից:
2. Տրված ուղիղ եռանկյուն պրիզմայի ծավալի ո՞ր մասն է կազմում այն եռանկյուն պրիզմայի ծավալը, որը գատվում է տրվածից՝ հիմքերի միջին գծերով անցնող հարթությամբ:
3. Կփոփոխվի՞, արդյոք, գլանի ծավալը, եթե նրա հիմքի տրամագիծը 2 անգամով մեծացվի, իսկ բարձրությունը 4 անգամով փոքրացվի:

4. Ինչպե՞ս կփոփոխվի կանոնավոր բուրգի ծավալը, եթե նրա բարձրությունը n անգամով մեծացվի, իսկ հիմքի կողմը n անգամով փոքրացվի:
5. Հավասար բարձրություններով երկու բուրգերի հիմքերը համապատասխանաբար հավասար կողմերով քառանկյուններ են: Հավասա՞ր են, արդյոք, այդ բուրգերի ծավալները:
6. Ինչպե՞ս են հարաբերում երկու կոների ծավալները, եթե դրանց բարձրությունները հավասար են, իսկ հիմքերի շառավիղների հարաբերությունը 2 է:
7. Ի՞նչ մարմիններից է կազմված այն մարմինը, որն առաջացել է հավասարասրուն սեղանի պտտմամբ՝ մեծ հիմքի շուրջը:
8. Մի կոնը առաջացել է անհավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան պտտումից՝ էջերից մեկի շուրջը, իսկ մյուս կոնը՝ պտտումից՝ մյուս էջի շուրջը: Հավասա՞ր են, արդյոք, այդ կոների ծավալները:
9. Գնդերից մեկի տրամագիծը հավասար է մյուսի շառավիղին: Ինչի՞ է հավասար այդ գնդերի՝ **ա)** շառավիղների հարաբերությունը, **բ)** ծավալների հարաբերությունը:
10. 2սմ շառավիղով քանի՞ գունդ է հարկավոր, որպեսզի դրանց ծավալների գումարը հավասար լինի 6սմ շառավիղով գնդի ծավալին:
11. Խորանարդին արտագծած գնդի ծավալը քանի՞ անգամ է մեծ այդ նույն խորանարդին ներգծած գնդի ծավալից:
12. Ինչպե՞ս կփոփոխվի գնդային մակերևույթի մակերեսը, եթե նրա շառավիղը՝ **ա)** 2 անգամով փոքրացվի, **բ)** 3 անգամով մեծացվի:
13. Երկու գնդերի ծավալների հարաբերությունը 8 է: Ինչպե՞ս են հարաբերում դրանց մակերևույթների մակերեսները:
14. Ի՞նչ հարաբերություն է առկա երկու գնդերի ծավալների միջև, եթե դրանց մակերևույթների մակերեսները հարաբերում են, ինչպես $m^2:n^2$:

Լրացուցիչ խնդիրներ

373. Ուղղանկյունանիստի երեք՝ զույգ առ զույգ կից նիստերի մակերեսներն են S_1, S_2, S_3: Ուղղանկյունանիստի ծավալն արտահայտեք S_1-ով, S_2-ով, S_3-ով և այն հաշվեք $S_1=6$դմ^2, $S_2=12$դմ^2, $S_3=18$դմ^2 դեպքում:

374. Ուղղանկյունանիստի երեք նիստերի անկյունագծերը, որոնք ելնում են միևնույն գագաթից, հավասար են 7սմ, 8սմ և 9սմ: Գտեք ուղղանկյունանիստի ծավալը:

375. Ուղղանկյունանիստի կողմնային կողը a է: Տարբեր հիմքերի երկու կողմերով անցնող հատույթը Q մակերեսով քառակուսի է: Գտեք ուղղանկյունանիստի ծավալը:

376. Ուղիղ զուգահեռանիստի հիմքի կողմերը 7սմ և $3\sqrt{2}$ սմ են, հիմքի սուր անկյունը 45^0 է: Զուգահեռանիստի փոքր անկյունագիծը հիմքի հարթության հետ կազմում է 45^0 անկյուն: Գտեք զուգահեռանիստի ծավալը:

377. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղիղ զուգահեռանիստում BD_1 և A_1C անկյունագծերը փոխուղղահայաց են և հավասար են 6սմ և 8սմ, իսկ AB=3սմ: Գտեք զուգահեռանիստի ծավալը:

378. Ուղիղ պրիզմայում, որի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է, հինգ կողեր հավասար են a-ի, իսկ մնացած չորս կողերը միմյանց հավասար են: Գտեք պրիզմայի ծավալը:

379. Ուղիղ պրիզմայի, որի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է, ծավալը 3մ^3 է, իսկ կողմնային նիստերի մակերեսներից ամենափոքրը և ամենամեծը 3մ^2 և $3\sqrt{5}$ մ^2 են: Գտեք պրիզմայի կողերի երկարությունները:

380. Կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի կողմնային նիստի անկյունագիծը d է և մյուս կողմնային նիստի հարթության հետ կազմում է φ անկյուն: Գտեք պրիզմայի ծավալը:

381. Ապացուցեք, որ եռանկյուն պրիզմայի ծավալը հավասար է կողմնային նիստի մակերեսի և այդ նիստն ընդգրկող հարթությունից նրան զուգահեռ կողի հեռավորության արտադրյալի կեսին:

382. Տրված երեք զուգահեռ ուղիղների վրա, որոնք ընկած չեն մի հարթության մեջ, տեղադրված են երեք հավասար հատվածներ՝ AA_1-ը, BB_1-ը, CC_1-ը: Ապացուցեք, որ այն պրիզմայի ծավալը, որի կողմնային կողերը այդ հատվածներն են, կախված չէ տրված ուղիղների վրա հատվածների դիրքից:

383. Թեք եռանկյուն պրիզմայի կողմնային նիստերի մակերեսները համեմատական են 20, 37, 51 թվերին: Կողմնային կողը 0,5դմ է, իսկ կողմնային մակերևույթի մակերեսը՝ 10,8դմ^2: Գտեք պրիզմայի ծավալը:

384. Գտեք կանոնավոր եռանկյուն բուրգի ծավալը, եթե կողմնային նիստը հիմքի հարթության հետ կազմում է φ անկյուն, իսկ հիմքի՝ այդ նիստի մեջ չընկած գագաթը գտնվում է դրանից m հեռավորության վրա:

385. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի կողմնային կողը հիմքի հետ կազմում է φ անկյուն, իսկ այդ կողի միջնակետը գտնվում է բուրգի հիմքից m հեռավորության վրա: Գտեք բուրգի ծավալը:

386. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի բարձրությունը h է, իսկ այն երկնիստ անկյունը, որի կողը բուրգի կողմնային կողն է, հավասար է 2φ: Գտեք բուրգի ծավալը:

387. Կանոնավոր n-անկյուն բուրգի գագաթին հարակից հարթ անկյունը α է, իսկ հիմքի կողմը՝ a: Գտեք բուրգի ծավալը:

388. Բուրգի հիմքը եռանկյուն է, որի երկու անկյուններն են φ_1 և φ_2: Բուրգի բարձրությունը h է, իսկ յուրաքանչյուր կողմնային կողը հիմքի հարթության հետ կազմում է φ_3 անկյուն: Գտեք բուրգի ծավալը:

389. Քառանկյուն բուրգի բարձրությունը H է, իսկ հիմքը զուգահեռագիծ է, որի անկյունագծերը հատվում են α անկյան տակ: Բուրգի զույգ առ զույգ հավասար հանդիպակաց կողմնային կողերը հիմքի հարթության հետ կազմում են β և γ անկյուններ: Գտեք բուրգի ծավալը:

390. Բուրգի հիմքը a կողմով հեղանկյուն է: Բուրգի երկու կողմնային նիստերն ուղղահայաց են հիմքի հարթությանը և կազմում են φ բութ երկնիստ անկյուն: Մյուս երկու կողմնային նիստերը հիմքի հարթության հետ կազմում են θ երկնիստ անկյուններ: Գտեք բուրգի ծավալը:

391. Քառանիստի երկու կողմնային կողերը հավասար են b-ի, իսկ մնացած չորս կողերը՝ a-ի: Գտեք քառանիստի ծավալը, եթե b երկարությամբ կողերը՝ **ա)** ունեն ընդհանուր կետեր, **բ)** ընդհանուր կետեր չունեն:

392. Հատած բուրգում հիմքերի համապատասխան կողմերը հարաբերում են՝ ինչպես 2:5 : Նրա ծավալը ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանվում այն հարթությամբ, որն անցնում է այդ բուրգի բարձրության միջնակետով և զուգահեռ է հիմքերին:

393. Գտեք գլանի ծավալը, եթե. **ա)** կողմնային մակերևույթի մակերեսը S է, իսկ հիմքի մակերեսը՝ Q, **բ)** առանցքային հատույթը քառակուսի է, իսկ բարձրությունը h է, **գ)** առանցքային հատույթը քառակուսի է, իսկ լրիվ մակերևույթի մակերեսը S է:

394. Ապացուցեք, որ հավասար կողմնային մակերևույթի մակերեսներ ունեցող երկու գլանների ծավալները հարաբերում են, ինչպես նրանց շառավիղները:

395. Կոնաձև բաքն ունի 3մ խորություն, իսկ նրա վերին բոլորակն ունի 1,5մ շառավիղ: Քանի՞ լիտր է բաքի տարողությունը:

Համակցված խնդիրներ բազմանիստերի, գլանի, կոնի և գնդի վերաբերյալ

396. Կոնին ներգծած է բուրգ, որի հիմքը ուղղանկյուն է: Ուղղանկյան փոքր կողմը a է. իսկ նրա անկյունագծերի կազմած սուր անկյունը՝ φ_1: Հիմքի փոքր կողմն ընդգրկող կողմնային նիստը հիմքի հարթության հետ կազմում է φ_2 երկնիստ անկյուն: Գտեք կոնի ծավալը:

397. Բուրգի հիմքը հեղանկյուն է, որի կողմը a է, սուր անկյունը՝ φ: Բուրգին ներգծած է կոն, որի ծնորդը հիմքի հարթության հետ կազմում է θ անկյուն: Գտեք կոնի ծավալը:

398. Գլանին ներգծած է գունդ: Գտեք գլանի և գնդի ծավալների հարաբերությունը:

399. Գտեք կոնի ծավալը, եթե նրա հիմքի շառավիղը 6դմ է, իսկ այդ կոնին ներգծած գնդային մակերևույթի շառավիղը՝ 3դմ:

400. Կոնին, որի հիմքի շառավիղը r է, իսկ ծնորդը՝ ℓ, ներգծած է գնդային մակերևույթ: Գտեք այն գծի երկարությունը, որով գնդային մակերևույթը հոշափում է կոնի կողմնային մակերևույթը:

401. Հաստ սոսինձ, որի խտության r և r_1 են, ներծծած է զտուղ: Գտեք հաստ սոսինձ ծախսվող նյութերի քաշերը:

402. Կաոճախոտ բաղկացած բույրեն, որի խիչերից առնվեր նիհարած ապակեհատներ: Գտեք չաշխատի 1,5 է, իսկ ապակեհատ բարձրությունը x է, ներծծած է V ծախսվող ուժեղ զտուղ: Գտեք բույրի ծախսը:

403. Բույրեն, որի խիչը a հոսման և x ապրուհոպ շեղացիրուն է, ներծծած է զտուղ: Գտեք գնով ծախսը, եթե բույրի յուրաքանչյուր կոնցեպտի գնաոր խիչեր հետ կապված է β ապրուհ:

404. Ջ շաոախիոսի գնորդնի ներկնությեն ներծծած է գլուխ, որ առաջադիմության ներկայացնող խիչերի հետ կապված է x ապրուհ:
Գտեք գլուխ ծախսը:

405. Գնորդ ներծծած է գլուխ, որոշ առաջարկող հատկությեն ապրուհ զծերի կապված ապրուհը x է: Գտեք գնով ծախսը f է: Գտեք գնի ծախսը:

406. Գնորդ ներծծած է կոճ, որի խիչի շաոախիոսը r է, իսկ բարձրությունը H: Գտեք գնով ներկնությեն ապրուհ ծախսը:

407. Գնորդ ներծծած է բույրեն, որի խիչը շատ ներքաճոճող ուղղահայաց է: Գտեք գնի ապրուհ ներկնությեն ծախսը, եթե բույրի կոնցեպցիայի խիչը հետ կապված է x

Դժվարին խնդիրներ

412. Գնդային մակերևույթի կետից տարված են երեք՝ զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց լարեր: Ապացուցեք, որ դրանց քառակուսիների գումարը կախված չէ այդ լարերի դիրքից:

413. Գտեք գնդի այն բոլոր հատույթների կենտրոնների բազմությունը, որոնք առաջանում են գունդը չհատող տրված ուղղով անցնող հարթություններով:

414. Գտեք այն բոլոր կետերի բազմությունը, որոնցից կարելի է տրված գնդային մակերևույթին տանել երեք՝ զույգ առ զույգ փոխուղահայաց շոշափող ուղիղներ:

415. h_1, h_2, h_3, h_4 բարձրություններ ունեցող քառանիստին ներգծած է R շառավիղով գունդ: Ապացուցեք, որ $\frac{1}{R}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}$:

416. Ի՞նչ պայմանի պետք է բավարարեն երեք՝ զույգ առ զույգ միմյանց շոշափող գնդերի շառավիղները, որպեսզի դրանց հնարավոր լինի տանել ընդհանուր շոշափող հարթություն:

417. Հարթության վրա դրված են R շառավիղով չորս գնդեր, ընդ որում՝ նրանցից երեքը զույգ առ զույգ շոշափում են միմյանց, իսկ չորրորդը շոշափում է դրանցից երկուսը: Այդ գնդերի վրա, վերևում, տեղադրված են ավելի փոքր r շառավիղով երկու՝ միմյանց շոշափող գնդեր, ընդ որում՝ դրանցից յուրաքանչյուրը շոշափում է երեք մեծ գնդեր: Գտեք փոքր գնդերի շառավիղը:

418. Հարթության վրա դրվել են R շառավիղով, զույգ առ զույգ միմյանց շոշափող երեք գնդեր: Կոնի հիմքն ընկած է նշված հարթության մեջ, իսկ այդ գնդերը դրսից շոշափում են կոնը: Կոնի բարձրությունը հավասար է λR: Գտեք նրա հիմքի շառավիղը:

419. AB_1C_1 և A_1BC հարթությունները $ABCA_1B_1C_1$ եռանկյուն պրիզման տրոհում են չորս մասի: Գտեք այդ մասերի ծավալների հարաբերությունը:

420. Ապացուցեք, որ քառանիստի ծավալը հավասար է $\frac{1}{6}abc\sin\varphi$, որտեղ a-ն և b-ն հանդիպակաց կողեր են, իսկ φ-ն և c-ն՝ դրանց, համապատասխանաբար, կազմած անկյունն ու հեռավորությունը:

421. Ապացուցեք, որ քառանիստի կողով և դրա հանդիպակաց կողի միջնակետով անցնող հարթությունը տրոհում է քառանիստը երկու մասի, որոնց ծավալները հավասար են:

422. $OABCD$ բուրգի հիմքը $ABCD$ զուգահեռագիծն է: Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանվում բուրգի ծավալն այն հարթությամբ, որն անցնում է AB ուղղով և OCD նիստի միջին գծով:

423. Տրված են երեք զուգահեռ ուղիղներ, որոնք չեն ընկած մի հարթության մեջ: Նրանցից մեկի վրա վերցված է AB հատվածը, իսկ մյուս երկուսի վրա՝ համապատասխանաբար C և D կետերը: Ապացուցեք, որ $ABCD$ քառանիստի ծավալը կախված չէ C և D կետերի ընտրությունից:

424. E և F կետերը 1սմ կող ունեցող $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի DC և BB_1 կողերի միջնակետերն են: Գտեք AD_1EF քառանիստի ծավալը:

425. Երկու զուգահեռ հարթությունների վրա վերցված են երկու բազմանկյուններ: Դրանց գագաթները հատվածներով միացված են այնպես, որ ստացված բազմանիստի բոլոր կողմնային նիստերը սեղաններ են, եռանկյուններ և զուգահեռագծեր:

Ապացուցեք, որ $V=\frac{h}{6}(S_1+S_2+4S_3)$, որտեղ V-ն բազմանիստի ծավալն է, h-ը՝ նրա բարձրությունը, S_1-ը և S_2-ը հիմքերի մակերեսներն են, իսկ S_3-ը այն հատույթի մակերեսն է, որն առաջանում է հիմքերին զուգահեռ և դրանցից հավասարահեռ հարթությամբ:

426. Երկու հավասար գլաններ, որոնց բարձրությունները մեծ են տրամագծերից, դասավորված են այնպես, որ նրանց առանցքները հատվում են ուղիղ անկյան տակ, իսկ առանցքների հատման կետը հավասարահեռ է գլանների հիմքերից: Գտեք այդ գլանների ընդհանուր մասի ծավալը, եթե նրանցից յուրաքանչյուրի շառավիղը 1սմ է:

427. Տրված գնդին արտագծած է կոն, որի առանցքային հատույթի՝ գագաթին հարակից անկյունը α է: α-ի ո՞ր արժեքի դեպքում կոնը կունենա փոքրագույն ծավալ:

428. Կոնին ներգծած է գունդ: Ապացուցեք, որ կոնի և գնդի ծավալների հարաբերությունը հավասար է կոնի լրիվ մակերևույթի և գնդի սահման հանդիսացող գնդային մակերևույթի մակերեսների հարաբերությանը:

429. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգը, որում հիմքի կողմը a է, իսկ գագաթին հարակից հարթ անկյունը՝ α, պտտվում է այն ուղղի շուրջը, որն անցնում է գագաթով և զուգահեռ է հիմքի կողմին: Գտեք ստացված պտտման մարմնի ծավալը:

430. Գունդն առաջացել է՝ պտտելով կիսաշրջանը տրամագիծն ընդգրկող ուղղի շուրջը: Ընդ որում՝ ինչ-որ մի լարի պտտումից, որի ծայրակետերից մեկը համընկնում է տվյալ տրամագծի ծայրակետին, առաջանում է այնպիսի մակերևույթ, որով գունդը տրոհվում է հավասար ծավալներով երկու մասի: Գտեք այդ լարի և տրամագծի կազմած անկյան կոսինուսը:

431. Քառանիստի բոլոր բարձրությունները հատվում են H կետում: Ապացուցեք, որ H կետը, արտագծյալ գնդային մակերևույթի O կենտրոնը և այն հատվածների հատման G կետը, որոնք քառանիստի գագաթները միացնում են հանդիպակաց նիստերի միջնագծերի հատման կետերին, ընկած են մի ուղղի վրա (Էյլերի ուղիղը), ընդ որում՝ O և H կետերը համաչափ են G կետի նկատմամբ:

432. Տրված է քառանիստ, որի բոլոր բարձրությունները հատվում են մի կետում: Ապացուցեք, որ բոլոր նիստերի միջնագծերի հատման կետերը, քառանիստի բարձրությունների հիմքերը և այն կետերը, որոնք բարձրությունների հատման կետը գագաթներին միացնող հատվածներից յուրաքանչյուրը տրոհում են 2:1 հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից, ընկած են մի գնդային մակերևույթի վրա, որի կենտրոնը գտնվում է Էյլերի ուղղի վրա (Էյլերի գնդային մակերևույթը):

Դասընթացի կրկնության հարցեր և խնդիրներ

1. Տրված A, B, C և D կետերը մի հարթության չեն պատկանում: Ինչպիսի՞ փոխադասավորություն ունեն AD, BD և CD հատվածների միջնակետերով անցնող հարթությունն ու ABC հարթությունը: Պատասխանը հիմնավորեք:
2. Տրված են չորս կետեր: Հայտնի է, որ այդ կետերից ցանկացած երկուսով անցնող ուղիղը չի հատվում մյուս երկու կետերով անցնող ուղղին: Ապացուցեք, որ տրված չորս կետերը մի հարթության չեն պատկանում:
3. Տրված են մի հարթության չպատկանող չորս կետեր: Քանի՞ հարթություն կարելի է տանել այնպես, որ յուրաքանչյուրն անցնի տրված կետերից երեքով:
4. A, B, C, D չորս կետերը մի հարթության չեն պատկանում: Քանի՞ ուղիղ կարելի է տանել այդ կետերի զույգերով:
5. a ուղիղը զուգահեռ է b և c զուգահեռ ուղիղներից յուրաքանչյուրին: Քանի՞ հարթություն է հնարավոր տանել այդ ուղիղների զույգերով:
6. Տարածության մեջ տրված են չորս զուգահեռ ուղիղներ, որոնցից ցանկացած երեքը մի հարթության մեջ չեն ընկած: Քանի՞ հարթություն է հնարավոր տանել այդ ուղիղների զույգերով:
7. α հարթությունը β և γ հարթությունները հատում է զուգահեռ ուղիղներով: Արդյոք զուգահե՞ռ են β և γ հարթությունները:
8. Տրված են α հարթությունը և նրա մեջ չընկած A կետը: Որոշեք AM հատվածների միջնակետերի երկրաչափական տեղը, որտեղ M-ը α հարթության կամայական կետ է:
9. Գտեք այն բոլոր հատվածների միջնակետերի երկրաչափական տեղը, որոնց ծայրակետերն ընկած են երկու զուգահեռ հարթությունների մեջ:
10. AB և CD ուղիղները հատվում են: Կարո՞ղ են, արդյոք, AC և BD ուղիղները լինել. **ա)** զուգահեռ, **բ)** հատվող, **գ)** խաչվող:
11. α և β հարթությունները հատվում են: Ապացուցեք, որ ցանկացած γ հարթությունը հատում է α և β հարթություններից գոնե մեկը:
12. Արդյոք ճշմարի՞տ է այն պնդումը, որ միևնույն ուղղին ուղղահայաց ուղիղները զուգահեռ են:
13. Կարելի՞ է, արդյոք, տարածության մեջ տանել չորս այնպիսի ուղիղներ, որոնք զույգ առ զույգ լինեն փոխուղղահայաց:
14. A-ն և B-ն α հարթության կետեր են, իսկ M-ը տարածության այնպիսի կետ է, որ $AM=2$, $BM=5$, և α հարթության վրա BM հատվածի պրոյեկցիան երեք անգամ մեծ է այդ հարթության վրա AM հատվածի պրոյեկցիայից: Գտեք M կետի հեռավորությունը α հարթությունից:
15. Զուգահեռագծի անկյունագծով տարված է հարթություն: Ապացուցեք, որ մյուս անկյունագծի ծայրակետերը հավասարահեռ են այդ հարթությունից:

16. Զուգահեռագծի մի կողմով տարված է հարթություն՝ այնպես, որ դրա և հանդիպակաց կողմի հեռավորությունը a է: Գտեք զուգահեռագծի անկյունագծերի հատման կետի հեռավորությունն այդ հարթությունից:
17. Սեղանի հիմքով տարված է հարթություն, որից մյուս հիմքի հեռավորությունը a է: Գտեք սեղանի անկյունագծերի հատման կետի հեռավորությունը այդ հարթությունից, եթե սեղանի հիմքերը հարաբերում են, ինչպես $m:n$:
18. $ABCD$ քառանիստում $AB=2$, $BC=3$, $BD=4$, $AD=2\sqrt{5}$, $CD=5$: Ապացուցեք, որ BD-ն ուղղահայաց է ABC հարթությանը:
19. ABC հավասարակողմ եռանկյան գագաթից այդ եռանկյան հարթությանը տարված է AD ուղղահայացը: Գտեք D կետի հեռավորությունը BC կողմից, եթե $AD=13$սմ, $BC=6$սմ:
20. M կետը հավասարապես է հեռացված ABC եռանկյան գագաթներից: Ապացուցեք, որ ABC հարթության վրա M կետի պրոյեկցիան ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է:
21. A-ն տարածության որևէ կետ է, B-ն A կետի պրոյեկցիան է α հարթության վրա, իսկ ℓ-ը՝ այդ հարթության որևէ ուղիղ: Ինչպե՞ս են դասավորված A և B կետերի պրոյեկցիաները ℓ ուղղի վրա:
22. a ուղղի A կետով տարված են β հարթությունը և b ուղիղը, որոնցից յուրաքանչյուրն ուղղահայաց է a ուղղին: Ապացուցեք, որ b ուղիղն ընկած է β հարթության մեջ:
23. Ապացուցեք, որ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդում AC_1 և BD ուղիղները ուղղահայաց են:
24. Գտեք այն երկու անկյունների գումարը, որ կամայական ուղիղը կազմում է տրված հարթության և այդ հարթությանն ուղղահայաց ուղղի հետ:
25. Երկնիստ անկյունը 60^0 է: Նրա նիստերից մեկի վրա պատկերված է a կողմով քառակուսի, որի մի կողմն ընկած է երկնիստ անկյան կողի վրա: Գտեք մյուս նիստի վրա այդ քառակուսու պրոյեկցիայի մակերեսը:
26. 2սմ էջով հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգն ընկած է 45^0-ի երկնիստ անկյան կողի վրա, իսկ ուղիղ անկյան գագաթը՝ նիստերից մեկի վրա: Գտեք մյուս նիստի վրա այդ գագաթի պրոյեկցիայի հեռավորությունը երկնիստ անկյան կողից:
27. Նվազագույնը քանի՞ գույնի ներկ է հարկավոր ընտրել խորանարդի մակերևույթը ներկելու համար՝ այնպես, որ հարևան նիստերը լինեն տարբեր գույնի:
28. Պատշարն ունի միատեսակ աղյուսներ և ուզում է չափել աղյուսի անկյունագիծը՝ կատարելով մեկ չափում սանդղակավոր քանոնով: Ինչպե՞ս դա անել՝ առանց հաշվարկումներ կատարելու:
29. **ա)** Լուցկու 6 հատիկով կազմեցեք չորս հավասար եռանկյուններ:
բ) Լուցկու 9 հատիկով կազմեցեք յոթ հավասար եռանկյուններ:
30. Կարո՞ղ է, արդյոք, որևէ բուրգի փռվածքը լինել քառակուսի:
31. Առավելագույնը քանի՞ հավասար կողեր կարող է ունենալ այն եռանկյուն պրիզման, որի հիմքը տարակողմ եռանկյուն է:

32. Կանոնավոր բուրգի բոլոր կողերը միմյանց հավասար են: Ի՞նչ պատկեր կարող է լինել այդպիսի բուրգի հիմքը: Պատասխանը հիմնավորեք:
33. Ապացուցեք, որ եթե բուրգի բոլոր կողմնային կողերը հավասար են, և հավասար են հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունները, ապա այդ բուրգը կանոնավոր է:
34. Եռանկյան բուրգի հիմքը a և b էջերով ուղղանկյուն եռանկյուն է, որի ներքնաձիգը հավասար է բուրգի կողմնային կողերին: Գտեք բուրգի բարձրությունը:
35. Քառանկյուն բուրգի հիմքի երեք կողմերն են 5սմ, 7սմ և 8սմ (կից կողմերը նշված են հերթականությամբ): Գտեք հիմքի չորրորդ կողմը, եթե հայտնի է, որ հիմքին առընթեր բոլոր երկնիստ անկյունները հավասար են:
36. Գտեք $ABCD$ բուրգի երկնիստ անկյունները, եթե այդ բուրգի բոլոր կողերը միմյանց հավասար են:
37. Առավելագույնը քանի՞ կողմ կարող է ունենալ ուռուցիկ բազմանիստի նիստը, եթե այդ բազմանիստը՝ **ա)** վեցանիստ է, **բ)** հարյուրանիստ է:
38. Արդյոք կա՞ այնպիսի ոչ ուռուցիկ բազմանիստ, որն ունի. **ա)** չորս նիստ, **բ)** հինգ նիստ:
39. Կարո՞ղ է, արդյոք, ուռուցիկ բազմանկյան պրոյեկցիան լինել ոչ ուռուցիկ:
40. Ուռուցիկ բազմանիստը որևէ հարթությամբ հատելիս կարո՞ղ է, արդյոք, հատույթը լինել ոչ ուռուցիկ բազմանկյուն: Պատասխանը հիմնավորեք:
41. Ուռուցիկ բազմանիստը հարթությամբ հատելիս տրոհվում է երկու բազմանիստերի: Կարո՞ղ է, արդյոք, ստացված բազմանիստերից որևէ մեկը լինել ոչ ուռուցիկ: Պատասխանը հիմնավորեք:
42. Բերեք n-անիստ բազմանիստի այնպիսի օրինակ ($n\geq 4$), որում հնարավոր լինի ստանալ 3-ից մինչև n ցանկացած թվով կողմեր ունեցող հատույթներ: Նկարագրեք, թե ինչպես ստանալ այդ հատույթները:
43. Բուրգի հիմքին առընթեր յուրաքանչյուր երկնիստ անկյունը 60^0 է: Ապացուցեք, որ այդ բուրգի հիմքի մակերեսը կողմնային մակերևույթի մակերեսից փոքր է 2 անգամ, իսկ լրիվ մակերևույթի մակերեսից՝ 3 անգամ:
44. Բուրգի հիմքին առընթեր յուրաքանչյուր երկնիստ անկյունը α է, իսկ հիմքի մակերեսը S է: Գտեք այդ բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:
45. Բուրգի հիմքը 3սմ, 4սմ և 5սմ կողմերով եռանկյուն է, իսկ հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունները 45^0 են: Գտեք բուրգի բարձրությունը:
46. Բուրգի հիմքը 5սմ, 12սմ և 13սմ կողմերով եռանկյուն է, իսկ յուրաքանչյուր կողմնային կողը հիմքի հարթության հետ կազմում է 60^0 անկյուն: Գտեք բուրգի կողմնային կողերը և բարձրությունը:
47. Եռանկյուն պրիզման ինչպե՞ս տրոհել երեք՝ հավասար ծավալներով եռանկյուն բուրգերի:

48. Եռանկյուն բուրգի ⟨ՀՈՒՆ⟩ տրոհել չորս այնպիսի բուրգերի, որոնց հիմքերը լինեն մրցույթ հաւաստող եռանկյուններ, և այդ բուրգերից յուրաքանչյուրի բարձրությունը հաւասար լինի սկզբնական բուրգի բարձրությանը:

49. Եռանկյուն պրիզմայի յուրաքանչյուր կողմը 16սմ պարունակող ձոով շրջանագիծ է: Գտնել պրիզմայի հիմքերի մակերեսները:

50. $ABCA_1B_1C_1$ եռանկյուն պրիզմայում A գագաթին հարիր բոլոր այնպիսի ուղիղ անկյուն են, որ դրանց A գագաթից ելնող կողերը հաւասար են 3սմ, 4սմ և 5սմ: ⟨Ապացուցել՝, որ պրիզմայի կողմնային երեսները կազմում են հիմքի կողերի հետ հաւասար բուրգեր:

51. Ուղիղ եռանկյուն պրիզմայում ունի մրցույթ հաւասար յոր կող, որոնցից յուրաքանչյուրը 10սմ է, իսկ հիմքի պարագիծը 32սմ է: Գտնել պրիզմայի մակերեսները:

52. Պրիզմայի գագաթներ, կողերի և նիստերի քանակը գտնել 32 է: Ի՞նչ պատկեր է այդ պրիզմայի հիմքը:

53. Բուրգի գագաթներ, կողերի և նիստերի քանակը գտնել 30 է: Ի՞նչ պատկեր է այդ բուրգի հիմքը:

54. ⟨Ապացուցել՝, որ տրված բազմանիստերի գագաթներ, կողերի և նիստերի քանակը գտնելու համար (**w**) 102-ի, (**p**) 104-ի: Որոշել բազմանիստի տեսակը, եթե հայտնի է, որ դա պրիզմա է, կամ բուրգ:

63*. Հարթությունը հոշափում են R շառավիղով երեք գնդեր, որոնք զույգ առ զույգ հոշափում են միմյանց: Գտեք այն գնդի շառավիղը, որ հոշափում է այդ գնդերը և այդ հարթությունը:

64. Տրված է R շառավիղով մի գունդ, որը հոշափում է ինչ-որ մի հարթություն: Առավելագույնը քանի՞ գունդ՝ R շառավիղով, կարող են առանց միմյանց հատվելու միաժամանակ հոշափել տրված գունդը և այդ հարթությունը:

65*. Կարելի՞ է արդյոք, տարածության մեջ 13 հավասար գնդերը դասավորել այնպես, որ դրանք չհատվեն, ընդ որում՝ դրանցից 12-ը հոշափեն նույն գնդին:

66. Գտեք 1սմ կող ունեցող կանոնական քառանիստի մակերևույթի վրա ամենակարճ այն ճանապարհի երկարությունը, որ միացնում է հանդիպակաց կողերի միջնակետերը:

67. Գտեք միավոր խորանարդի մակերևույթի վրա ամենակարճ այն ճանապարհի երկարությունը, որ միացնում է խորանարդի հանդիպակաց գագաթները:

68. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի կողմնային կողը b է, իսկ գագաթին հարակից հարթ անկյունը՝ 15^0: Գտեք բուրգի մակերևույթի վրա ամենակարճ այն փակ ճանապարհի երկարությունը, որի սկիզբն ու վերջը հիմքի նույն գագաթն է, և այն հատում է բոլոր կողմնային կողերը:

69. Լուծեք նախորդ խնդիրը՝ ընդունելով, որ գագաթին հարակից հարթ անկյունը α է, և դիտարկեք հնարավոր դեպքերը՝ կախված α-ից:

70. Կոնի հիմքի շառավիղը $2a$ է, իսկ ծնորդը՝ $6a$: Գտեք կոնի մակերևույթի վրա ամենակարճ այն փակ ճանապարհի երկարությունը, որն անցնում է որևէ ծնորդի՝ հիմքին պատկանող ծայրակետով և հատում է մյուս բոլոր ծնորդները:

71. Գլանի հիմքի շառավիղը r է, բարձրությունը՝ h: Գտեք գլանի մակերևույթի վրա ամենակարճ այն ճանապարհի երկարությունը, որ միացնում է տարբեր հիմքերի՝ տրամագծորեն հակադիր կետերը:

72. Գտեք այն զուգահեռանիստի ծավալը, որի նիստերից երկուսը 1սմ կողմով և 60^0 սուր անկյունով շեղանկյուններ են, իսկ մյուսները քառակուսիներ են:

73. Գտեք այն զուգահեռանիստի ծավալը, որի բոլոր նիստերը 1սմ կողմով և 60^0 սուր անկյունով շեղանկյուններ են:

74. Ուղիղ զուգահեռանիստի հիմքը $1մ^2$ մակերեսով շեղանկյուն է, իսկ անկյունագծային հատույթների մակերեսները $3մ^2$ և $6մ^2$ են: Գտեք զուգահեռանիստի ծավալը:

75. Կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի հիմքի կողմը a է, իսկ կողմնային մակերևույթի մակերեսը կրկնակի փոքր է լրիվ մակերևույթի մակերեսից: Գտեք պրիզմայի ծավալը:

76. Կանոնավոր վեցանկյուն պրիզմայի ամենամեծ անկյունագծային հատույթի մակերեսը $4մ^2$ է, իսկ երկու հանդիպակաց կողմնային նիստերի միջև հեռավորությունը 2մ է: Գտեք պրիզմայի ծավալը:

77. Պրիզմայի հիմքը եռանկյուն է, որի կողերը են 2սմ, 3սմ, 3սմ: Կողմնային նրա 4սմ է և հիմքի հարթությանը հետ կազմում է 45°-ի անկյուն: Գտեք պրիզմայի ամբողջ մակերեսը:

78. Եռանկյուն պրիզմայի կողմերից մեկը հենտրիստրացիոն հարթության են, իսկ մյուս երեքը՝ կողմնային նրա 16 է, իսկ հողմային մակերեսների՝ 60°: Գտեք այդ պրիզմայի ծավալը:

79. Ուղիղ եռանկյուն պրիզմայի կողմնային մակերեսի անկյունագիծը m^2 է, իսկ այդ մակերեսները հարթությունների միջև անկյունը՝ 2α: Գտեք պրիզմայի ծավալը:

80. Եռանկյուն բուրգի կողմնային մակերեսները զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց են և ունեն S, P, Q մակերեսներ: Գտեք այդ բուրգի ծավալը:

81. Եռանկյուն բուրգի կողերից մեկը 4սմ է, իսկ մյուս բոլոր կողերը 3սմ են: Գտեք բուրգի ծավալը:

82. Ուրգի բարձրությունը հիմքին զուգահեռ հարթությամբ բաժանված է երեք հավասար մասերի: Մյդ հարթություններից ի՞նչ հարաբերություն են բաժանված բուրգի ծավալը:

83. Նորաձարուկ, որի հողը 10սմ է, գնտաիմիուկ են կետերի հետևյալ բազմությունները.

ա) այն կետերի, որոնք ունեն չեն նորաձարի մի գոլի կեռտրոն է, որի շառավիղը a է: Գտեք նորաձարի այն մասի ծավալը, որն ընդգրկված չէ այդ գնդի մեջ:

90. Կանոնավոր վեցանկյուն պրիզմայի բոլոր կողերը a են: Գտեք.
ա) պրիզմայի ծավալը,
բ) արտագծած գնդային մակերևույթի շառավիղը,
գ) հիմքերի հանդիպակաց գագաթներով անցնող ուղղի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը:

91. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի կողմերը a են, հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունը 60^0 է: Գտեք.
ա) բուրգի ծավալը,
բ) կողմնային կողի և հիմքի կազմած անկյունը,
գ) հանդիպակաց կողմնային նիստերով կազմված անկյունը,
դ) հարևան կողմնային նիստերով կազմված երկնիստ անկյունը,
ե) արտագծած գնդային մակերևույթի շառավիղը,
զ) ներգծած գնդային մակերևույթի շառավիղը,
է) հիմքի անկյունագծով անցնող ուղղի հեռավորությունը այն ուղղից, որն անցնում է բուրգի գագաթով և հիմքի կողմի միջնակետով:

92. Գտեք այն գնդի շառավիղը, որը շոշափում է միավոր խորանարդի երեք նիստերը և այդ խորանարդին ներգծած գունդը:

93. Գտեք այն գնդային մակերևույթի հավասարումը, որի տրամագծերից մեկի ծայրակետերն են $A(1;-2;3)$ և $B(-3;4;1)$ կետերը:

94. Ցույց տվեք, որ $x^2+y^2+z^2+x+2y+3z=0$ հավասարումը գնդային մակերևույթի հավասարում է: Գտեք այդ գնդի կենտրոնի կոորդինատները և շառավիղը:

95. Տրված են $ABCA_1B_1C_1$ պրիզմայի չորս գագաթները. $A(0;\,0;\,1)$, $B(2;\,1;\,1)$, $A_1(3;\,0;\,-2)$, $C_1(2;\,2;\,-1)$: Գտեք մյուս երկու գագաթների կոորդինատները:

96. Տրված են $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի չորս գագաթներ. **ա)** $A(1;\,0;\,-1)$, $B(2;\,-1;\,1)$, $C(3;\,0;\,0)$, $C_1(1;\,2;\,2)$, **բ)** $A(-2;\,1;\,0)$, $C(0;\,1;\,2)$, $B_1(-3;\,1;\,0)$, $D_1(-3;\,0;\,2)$: Գտեք մյուս չորս գագաթների կոորդինատները:

97. h բարձրություն և հիմքի R շառավիղ ունեցող գլանից հեռացրել են երկու կոն: Այդ կոներից յուրաքանչյուրի հիմքը համընկնում է գլանի հիմքերից մեկին, իսկ գագաթը՝ գլանի հիմքերի կենտրոնները միացնող հատվածի միջնակետին: Գտեք ստացված մարմնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը և ծավալը:

98. 4,5մ երկարությամբ գերանն ունի հատած կոնի տեսք, որի հիմքերի տրամագծերը 24սմ և 16սմ են: Գերանի ծավալը հաշվելու համար ընդունեցին, որ միջին լայնական հատույթը 20սմ տրամագծով շրջան է, և այդ շրջանի մակերեսը բազմապատկեցին գերանի երկարությունով: Որոշեք թույլ տրված սխալի տոկոսը:

99. Գնդին արտագծած է հատած կոն, որի հիմքերի շառավիղներն են r և R: Գտեք գնդի շառավիղը:

100. R շառավիղով գնդին արտագծած է հատած կոն, որի ծավալը կրկնակի մեծ է այդ գնդի ծավալից: Գտեք նրա հիմքերի շառավիղները:

Երկրաչափական պարզագույն պատկերներ

Երկրաչափական պարզագույն պատկերներից են, որոնց մասին հաստատ է ոչ երկրաչափը, այնպես՝ տրամաբանական սկզբունքների վրա հենվող ցանկացած գիտություն: Ընդունենք առանց ապացուցման մի շարք պնդումներ՝ աքսիոմներ, որոնք հիմք կծառայեն հետագա դատողությունների համար:

1. Յուրաքանչյուր ուղիղ մի և յուրաքանչյուր հարթության վրա կա առնվազն երեք կետ:

2. Կամ առնվազն երեք կետ, որ ընկած չեն մի ուղիղ մեջ, և առնվազն չորս կետ, որ ընկած չեն մի հարթության մեջ:

3. Յուրաքանչյուր երեք կետով անցնում է ուղիղ, որ տրված չի երեք կետով:

4. Մի ուղիղ մի չընկած ցանկացած երեք կետով անցնում է հարթություն, ընդ որում՝ միայն մեկը:

5. Եթե ուղիղ երեք կետեր ընկած են հարթության մեջ, ապա ողջ ուղիղ ընկած են այդ հարթության մեջ:

6. Եթե երեք հարթությունները ունեն ընդհանուր կետ, ապա գոնե մեկ ուրիշ կետ ևս ընդհանուր է նրանց, որ միայն ընկած են այդ հարթությունների վրա:

7. Ուղիղ երեք կետերով մեկը, ընդ որում մեկն միայն, ընկած է մյուս երկուսի վրա:

Երբեմն «*B* կետը ընկած է *A* և *C* կետերի վրա» ասելու փոխարեն, ասում են, որ *A* և *C* կետերը ընկած են *B* կետի միջոցով անցնող ուղղի վրա, կամ *A* և

B կետերն ընկած են C կետի միևնույն կողմում (նմանապես՝ B և C կետերն ընկած են A կետի միևնույն կողմում):

8. **Ուղղի յուրաքանչյուր O կետն այն տրոհում է երկու մասի՝ երկու ճառագայթի այնպես, որ միևնույն ճառագայթի ցանկացած երկու կետերն ընկած են O կետի մի կողմում, իսկ տարբեր ճառագայթների ցանկացած երկու կետերը՝ O կետի տարբեր կողմերում: Այդ դեպքում O կետը չի պատկանում նշված ճառագայթներից ոչ մեկին:**

Հիշենք, որ AB հատված կոչվում է այն երկրաչափական պատկերը, որը կազմված է A և B կետերից և AB ուղղի այն բոլոր կետերից, որոնք ընկած են դրանց միջև: Եթե AB հատվածն ու a ուղիղն ընկած են մի հարթության մեջ և չունեն ընդհանուր կետեր, ապա ասում են, որ A և B կետերն ընկած են a ուղղի միևնույն կողմում, իսկ եթե AB հատվածը հատվում է a ուղղին A-ի և B-ի միջև ընկած որևէ կետում, ապա ասում են, որ A և B կետերն ընկած են a ուղղի տարբեր կողմերում:

9. **Հարթության մեջ ընկած յուրաքանչյուր a ուղիղ այդ հարթությունը տրոհում է երկու մասի (երկու կիսահարթության) այնպես, որ միևնույն կիսահարթության ցանկացած երկու կետերն ընկած են a ուղղի միևնույն կողմում, իսկ տարբեր կիսահարթությունների ցանկացած երկու կետերը՝ a ուղղի տարբեր կողմերում: Այդ դեպքում a ուղղի կետերը չեն պատկանում այդ կիսահարթություններից ոչ մեկին:**

Եթե հատվածը տրված հարթության հետ չունի ընդհանուր կետեր, ապա ասում են, որ հատվածի ծայրակետերն ընկած են հարթության միևնույն կողմում, իսկ եթե հատվածը հարթությանը հատվում է իր ներքին որևէ կետում, ապա ասում են, որ հատվածի ծայրակետերն ընկած են հարթության տարբեր կողմերում:

10. **Յուրաքանչյուր α հարթություն տրոհում է տարածությունը երկու մասի (երկու կիսատարածության) այնպես, որ միևնույն կիսատարածության ցանկացած երկու կետերն ընկած են α հարթության միևնույն կողմում, իսկ տարբեր կիսատարածությունների ցանկացած երկու կետերը՝ α հարթության տարբեր կողմերում:**

Այդ դեպքում α հարթության կետերը չեն պատկանում նշված կիսատարածություններից ոչ մեկին: α հարթությունը կիսատարածություններից յուրաքանչյուրի համար կոչվում է **սահման:**

Աքսիոմների հաջորդ խումբը վերաբերում է պատկերների վերադրման և հավասարության հասկացություններին:

Ասելով վերադրում՝ մենք հասկանում ենք տարածության արտապատկերումն իր վրա: Սակայն տարածության՝ ինքն իր վրա արտապատկերումներից ոչ բոլորն են կոչվում վերադրում: **Վերադրումները** տարածության՝ ինքն իր վրա այնպիսի արտապատկերում են, որոնք օժտված են 11–17 աքսիոմներով արտահայտված հատկություններով: Այդ աքսիոմների ձևակերպումներում օգտագործվում է պատկերների հավասարության հասկացությունը, որը սահմանվում է այսպես. դիցուք՝ Φ-ն և Φ_1-ը երկու

պատկերներ են. **եթե գոյություն ունի վերադրում, որի դեպքում Φ պատկերն արտապատկերվում է Φ_1 պատկերին, ապա ասում են, որ Φ պատկերը կարող է վերադրմամբ համընկնել Φ_1 պատկերին, կամ որ Φ պատկերը հավասար է Φ_1 պատկերին:**

11. **Եթե վերադրելիս երկու հատվածների ծայրակետերը համընկնում են, ապա համընկնում են նաև իրենք՝ հատվածները:**
12. **Ցանկացած ճառագայթի վրա նրա սկզբնակետից կարելի է տեղադրել տրվածին հավասար հատված, ընդ որում՝ միայն մեկը:**
13. **Տրված կիսահարթության մեջ ցանկացած ճառագայթից կարելի է տեղադրել տրված չփռված անկյանը հավասար անկյուն, ընդ որում՝ միայն մեկը:**
14. **Երկու հավասար hk և h_1k_1 անկյուններ, որոնք ընկած են P և P_1 կիսատարածություններից սահման հանդիսացող հարթությունների մեջ, կարելի է վերադրմամբ համընկեցնել այնպես, որ այդ դեպքում համընկնեն P և P_1 կիսատարածությունները, ընդ որում՝ դա կարելի է անել երկու եղանակով՝ մի դեպքում այնպես, որ համընկնեն h և h_1, k և k_1 ճառագայթները, իսկ մյուս դեպքում՝ h և k_1, k և h_1 ճառագայթները:**
15. **Ցանկացած պատկեր հավասար է ինքը իրեն:**
16. **Եթե Φ պատկերը հավասար է Φ_1 պատկերին, ապա Φ_1 պատկերը հավասար է Φ պատկերին:**
17. **Եթե Φ_1 պատկերը հավասար է Φ_2 պատկերին, իսկ Φ_2 պատկերը՝ Φ_3 պատկերին, ապա Φ_1 պատկերը հավասար է Φ_3 պատկերին:**

Հաջորդ երկու աքսիոմները վերաբերում են հատվածների չափմանը: Նախքան դրանց ձևակերպելը՝ հիշենք, թե ինչպես են չափվում հատվածները: Դիցուք՝ AB-ն չափման ենթակա հատվածն է, իսկ PQ-ն՝ հատվածների չափման համար ընտրված միավորը: AB ճառագայթի վրա տեղադրենք $AA_1=PQ$ հատվածը, A_1B ճառագայթի վրա՝ $A_1A_2=PQ$ հատվածը, և այդպես շարունակ՝ քանի դեռ A_n կետը չի համընկել B կետին, կամ՝ B կետը չի հայտնվել A_n և A_{n+1} կետերի միջև: Առաջին դեպքում ասում են, որ AB հատվածի երկարությունը՝ ըստ PQ չափման միավորի արտահայտվում է n թվով (կամ՝ PQ հատվածը AB հատվածում տեղավորվում է n անգամ): Երկրորդ դեպքում կարելի է ասել, որ AB հատվածի երկարությունը՝ ըստ PQ չափման միավորի մոտավորապես արտահայտվում է n թվով: Առավել ճշգրիտ չափելու համար PQ հատվածը բաժանում են հավասար, սովորաբար՝ 10, մասերի և այդ մասերից մեկի միջոցով չափում են նկարագրված եղանակով A_nB մնացորդը: Եթե այդ դեպքում PQ հատվածի տասներորդ մասը չափվող մնացորդում ամբողջ թվով չի տեղավորվում, ապա այն, իր հերթին, բաժանվում է նաև 10 հավասար մասերի, և չափման ընթացքը շարունակվում է: Մենք ընդունում ենք, որ այդ եղանակով կարելի է ցանկացած հատվածը չափել, այսինքն՝ նրա երկարությունը՝ ըստ տրված չափման միավորի, արտահայտել վերջավոր կամ անվերջ տասնորդական կոտորակով: Այդ պնդումը ձևակերպվում է այսպես.

18. **Ցանկացած հատվածի երկարությունը՝ ըստ հատվածների չափման ընտրված միավորի, արտահայտվում է դրական թվով:**

Բացի այդ, մենք ընդունում ենք տրված երկարությամբ հատվածի գոյության աքսիոմը:

19. **Հատվածների չափման ընտրված միավորի դեպքում ցանկացած դրական թվի համար գոյություն ունի հատված, որի երկարությունն արտահայտվում է այդ թվով:**

Տարածաչափության, ինչպես և հարթաչափության մեջ, աքսիոմներից վերջինը զուգահեռ ուղիղների աքսիոմն է:

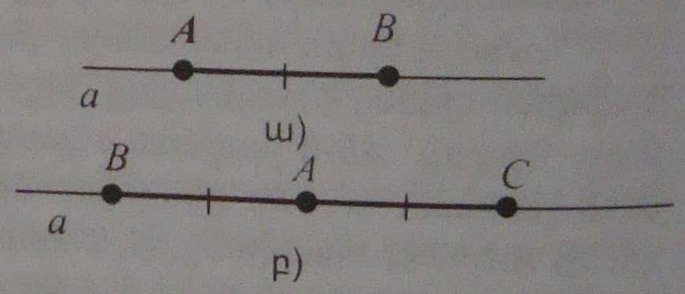
20. **Ցանկացած հարթության մեջ այդ հարթությունում տրված ուղղի վրա չընկած կետով անցնում է տրված ուղղին զուգահեռ միայն մեկ ուղիղ:**

8-րդ դասարանում (Երկրաչափություն-8, հավելված 1) մենք ասել ենք այն մասին, որ աքսիոմների հիման վրա կարելի է լուծել խնդիրներ և ապացուցել թեորեմներ՝ առանց ապավինելու երկրաչափական պատկերների հատկություններին վերաբերող ինչ-որ ակնառու պատկերացումների: Որպես այդպիսի օրինակ է բերվել եռանկյունների հավասարության առաջին հայտանիշն արտահայտող թեորեմի ապացուցումը՝ կատարված զուտ աքսիոմների հիման վրա: Բերենք այդպիսի մի քանի օրինակ ևս:

Խնդիր 1

Ապացուցել, որ յուրաքանչյուր ճառագայթի վրա կա առնվազն մեկ կետ:

Լուծում: Դիտարկենք A սկզբնակետով ճառագայթ, որն a ուղղի մի մասն է: a ուղղի վրա կա առնվազն մի B կետ, որ տարբեր է A կետից (աքսիոմ 1): Եթե B կետն ընկած է ճառագայթի վրա (նկ. 87,ա), ապա հենց դա այն կետն է, որի գոյությունը մենք ապացուցում ենք: Իսկ եթե B կետն ընկած է այդ ճառագայթի շարունակության վրա (նկ. 87,բ), ապա կվարվենք այսպես. ճառագայթի վրա նրա սկզբնակետից տեղադրենք $AC=AB$ հատված (աքսիոմ 12): Այդ դեպքում C կետը կընկնի ճառագայթի վրա: Պնդումն ապացուցված է:



Նկ. 87

Խնդիր 2

Ապացուցել, որ եթե A կետն ընկած է a ուղղի վրա, իսկ B կետն այդ ուղղի վրա ընկած չէ, ապա AB ճառագայթի բոլոր կետերն ընկած են a սահմանագծով նույն կիսահարթության մեջ:

Լուծում: Դիցուք՝ C-ն AB ճառագայթի կամայական կետ է, որ տարբեր է B կետից (իսկ կա՞, արդյոք, այդպիսի կետ. այդ հարցի պատասխանը տվեք ինքնուրույն): Ապացուցենք, որ C կետն ընկած է a սահմանագծով այն նույն կիսահարթության մեջ, որում ընկած է և B կետը: Քանի որ B և C

կետերն ընկած են A կետի միևնույն կողմում, ապա ըստ աքսիոմ 7-ի՝ A կետն ընկած չէ BC հատվածի վրա: Ուրեմն՝ եթե ենթադրենք, թե B և C կետերն ընկած են a սահմանագծով տարբեր կիսահարթությունների մեջ, ապա ստացվում է, որ a ուղիղը BC հատվածը հատում է մի D կետում, որ տարբեր է A կետից: Այլ խոսքով՝ կստացվի, որ A և D կետերով անցնում են երկու ուղիղներ՝ a-ն և AB-ն: Սակայն դա հակասում է աքսիոմ 3-ին: Հետևաբար՝ մեր ենթադրությունը ճշմարիտ չէ, ուրեմն՝ B և C կետերն ընկած են a սահմանագծով միևնույն կիսահարթության մեջ, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

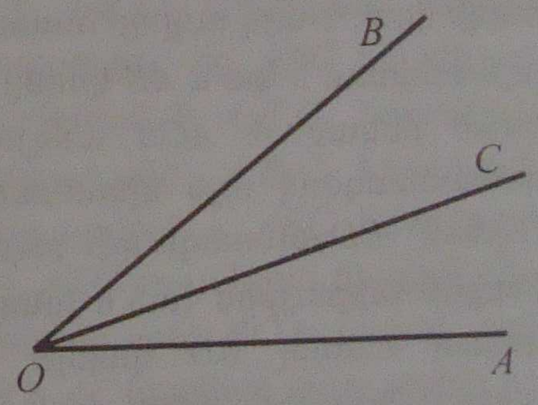
Երկրաչափության ուսումնասիրության ընթացքում մենք բազմիցս օգտագործել ենք չփռված անկյան ներքին տիրույթի հասկացությունը, որի տրման հիմքում ընկել են մեր ակնառու պատկերացումներն անկյունների մասին: Այժմ տանք այդ հասկացության սահմանումը:

***AOB* չփռված անկյան ներքին տիրույթ կոչվում է հետևյալ երկու կիսահարթությունների ընդհանուր մասը, դրանք են՝ *OA* սահմանագծով այն կիսահարթությունը, որն ընդգրկում է *B* կետը, և *OB* սահմանագծով այն կիսահարթությունը, որն ընդգրկում է *A* կետը:**

Խնդիր 3

Ապացուցել, որ եթե չփռված անկյան գագաթից ելնող ճառագայթն անցնում է այդ անկյան ներքին տիրույթի կետով, ապա ճառագայթի բոլոր կետերն ընկած են անկյան ներքին տիրույթում:

Լուծում: Դիտարկենք AOB անկյունը և OC ճառագայթը, որն անցնում է այդ անկյան ներքին տիրույթի C կետով (նկ. 88): Քանի որ C կետը պատկանում է OA սահմանագծով այն կիսահարթությանը, որն ընդգրկում է B կետը, ապա OC ճառագայթի բոլոր կետերը նույնպես պատկանում են այդ նույն կիսահարթությանը (տե՛ս խնդիր 2-ը): Համանման ձևով հաստատվում է, որ OC ճառագայթի բոլոր կետերը պատկանում են OB սահմանագծով այն կիսահարթությանը, որն ընդգրկում է A կետը: Հետևաբար՝ OC ճառագայթի բոլոր կետերը պատկանում են նշված կիսահարթությունների ընդհանուր մասին, այսինքն՝ AOB անկյան ներքին տիրույթին: Պնդումն ապացուցված է:



Նկ. 88

Խնդիր 4

Ապացուցել, որ եթե ուղիղը հատում է ABC եռանկյան AB կողմը և չի անցնում այդ եռանկյան գագաթով, ապա այն հատում է կա՛մ BC կողմը, կա՛մ AC կողմը:

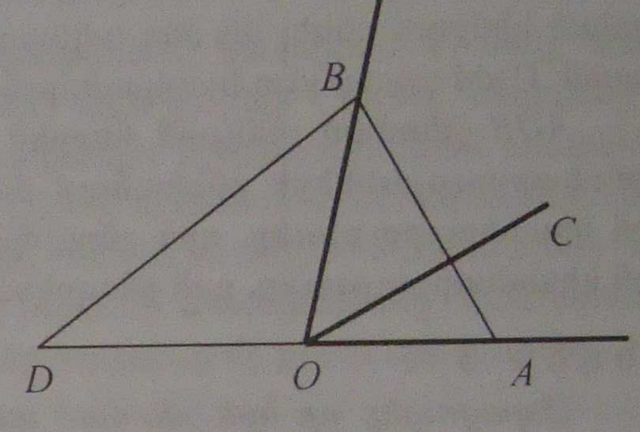
Լուծում: Տրված ուղիղը հարթությունը տրոհում է երկու կիսահարթության (աքսիոմ 9), ընդ որում՝ A և B կետերն ընկած են տարբեր կիսա-

հարթությունների մեջ: Ուրեմն՝ եթե C կետը A կետի հետ է ընկած մի կիսահարթության մեջ, ապա B և C կետերն ընկած են տարբեր կիսահարթությունների մեջ և, հետևաբար, տրված ուղիղը հատում է BC հատվածը: Իսկ եթե C կետը B կետի հետ է ընկած մի կիսահարթության մեջ, ապա A և C կետերն ընկած են տարբեր կիսահարթությունների մեջ և, ուրեմն, տրված ուղիղը հատում է AC հատվածը: Պնդումն ապացուցված է:

Խնդիր 5

Ապացուցել, որ եթե չփռված անկյան գագաթից ելնող ճառագայթն անցնում է այդ անկյան ներքին տիրույթի կետով, ապա այն տրոհում է այդ անկյունը երկու անկյունների:

Լուծում: Դիտարկենք AOB անկյունը, որի ներքին տիրույթի C կետով անցնում է OC ճառագայթը (նկ. 89): Պահանջվում է ապացուցել, որ AOC և BOC անկյունների ներքին տիրույթներն ընկած են OC ուղղի տարբեր կողմերում:



Նկ. 89

Դիցուք՝ D-ն մի կամայական կետ է, որ ընկած է O սկզբնակետով այն ճառագայթի վրա, որն OA ճառագայթի շարունակությունն է: A, B և D կետերն ընկած չեն OC ուղղի վրա, և այդ ուղիղը հատում է ABD եռանկյան AD կողմը: Հետևաբար՝ այն հատում է կա՛մ AB կողմը, կա՛մ BD կողմը (տե՛ս խնդիր 4-ը): Բայց D կետն ընկած չէ AOB անկյան ներքին տիրույթում. դա ընկած է OB սահմանագծով այն կիսահարթության մեջ, որը չի ընդգրկում A կետը: Ուրեմն՝ BD ճառագայթի բոլոր կետերը չեն պատկանում AOB անկյան ներքին տիրույթին (տե՛ս խնդիր 2-ը) և, հետևաբար, OC ճառագայթը չի կարող հատել BD կողմը. չէ՞ որ այդ ճառագայթի բոլոր կետերը պատկանում են AOB անկյան ներքին տիրույթին (տե՛ս խնդիր 3-ը): Հետևաբար՝ այն հատում է AB կողմը: Դա նշանակում է, որ A և B կետերը, ուրեմն նաև OA և OB ճառագայթները (տե՛ս խնդիր 2-ը) ընկած են OC ուղղի տարբեր կողմերում: Բայց այդ դեպքում AOC և BOC անկյունների ներքին տիրույթները նույնպես ընկած են OC ուղղի տարբեր կողմերում: Պնդումն ապացուցված է:

Դեռևս ներածության մեջ մենք նշել ենք, որ երկրաչափության աքսիոմներից հետևում է, որ եռանկյունների հավասարության և նմանության հարթաչափության դասընթացից հայտնի հայտանիշները ստույգ են նաև այնպիսի եռանկյունների համար, որոնք դասավորված են տարբեր հարթություններում: Ապացուցենք, օրինակ, **եռանկյունների հավասարության առաջին հայտանիշն** արտահայտող թեորեմը:

Թեորեմ: ***Երկու եռանկյան երկու կողմերն ու դրանցով կազմված անկյունը համապատասխանաբար հավասար են մյուս եռանկյան երկու կողմերին ու դրանցով կազմված անկյանը, ապա այդպիսի եռանկյունները հավասար են:***

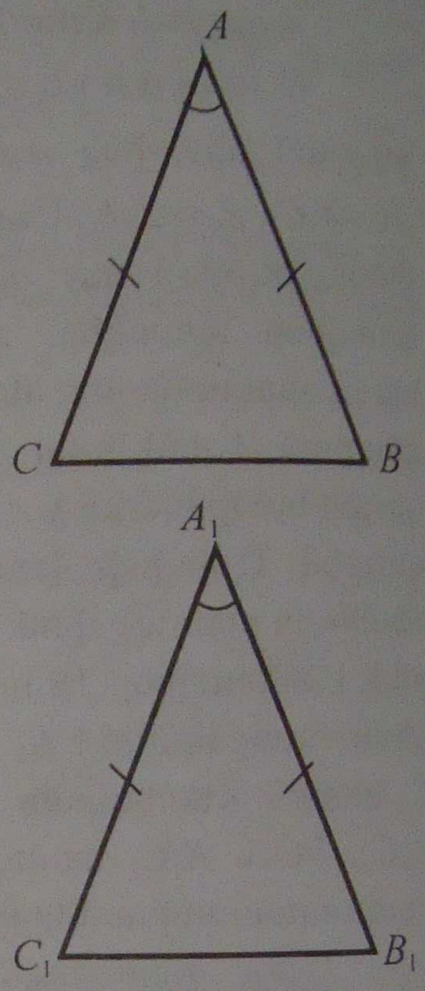
Ապացուցում: Դիցուք ABC եռանկյունը գտնվում է α հարթության մեջ, իսկ $A_1B_1C_1$ եռանկյունը՝ β հարթության մեջ, և $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$: Ապացուցենք, որ $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$, նկատի ունենալով, որ տարածության մեջ որպես եռանկյուն, սովորաբար, հասկանում են մի այնպիսի պատկեր, որ կազմված է ոչ միայն երեք կողմերով, այլև համապատասխան ներքին տիրույթով: Դիտարկենք մի վերադրում, որի դեպքում A անկյունը համընկնում է A_1 անկյանն այնպես, որ AB ճառագայթը համընկնում է A_1B_1 ճառագայթին, իսկ AC ճառագայթը՝ A_1C_1 ճառագայթին: Այդպիսի վերադրում գոյություն ունի՝ համաձայն աքսիոմ 14-ի: Քանի որ ըստ աքսիոմ 12-ի A_1B_1 ճառագայթի վրա նրա սկզբնակետից կարելի է տեղադրել AB հատվածին հավասար միայն մեկ հատված, ապա B կետը համընկնում է B_1 կետին: Համաձման դրան՝ C կետն էլ համընկնում է C_1 կետին: Հետևաբար՝ ըստ աքսիոմ 11-ի, համընկնում են AB և A_1B_1, AC և A_1C_1, BC և B_1C_1 հատվածները, այսինքն՝ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների համապատասխան կողմերը համընկնում են:

Այժմ ապացուցենք, որ նշված այդ վերադրման դեպքում ABC եռանկյան ներքին տիրույթը համընկնում է $A_1B_1C_1$ եռանկյան ներքին տիրույթին: Դրա համար հարկավոր է ապացուցել, որ ABC եռանկյան ներքին տիրույթի կամայական կետը համընկնում է $A_1B_1C_1$ եռանկյան ներքին տիրույթի մի որևէ կետի, և ընդհակառակը՝ $A_1B_1C_1$ եռանկյան ներքին տիրույթի կամայական կետին վերադրվում է ABC եռանկյան ներքին տիրույթի մի որևէ կետ: Դիցուք՝ M-ը ABC եռանկյան ներքին տիրույթի կամայական կետ է: M կետով տանենք մի որևէ PQ հատված, որի ծայրակետերն ընկած են ABC եռանկյան AB և AC կողմերի վրա: Քանի որ AB կողմը համընկնում է A_1B_1 կողմին, ապա P կետը համընկնում է A_1B_1 կողմի վրա ընկած մի որևէ P_1 կետի: Համաձման դրան՝ Q կետը համընկնում է A_1C_1 կողմի վրա ընկած մի որևէ Q_1 կետի: Հետևաբար՝ ըստ աքսիոմ 11-ի, PQ հատվածը համընկնում է P_1Q_1 հատվածին և, ուրեմն, PQ հատվածի M կետը համընկնում է P_1Q_1 հատվածի մի որևէ M_1 կետի, այսինքն՝ վերադրվում է $A_1B_1C_1$ եռանկյան ներքին տիրույթի M_1 կետին: Նույն կերպ կարելի է ապացուցել և հակադարձ պնդումը, այն է՝ $A_1B_1C_1$ եռանկյան ներքին տիրույթի ցանկացած կետին վերադրվում է ABC եռանկյան ներքին տիրույթի մի որևէ կետ: Այսպիսով՝ տվյալ վերադրման դեպքում ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյուններն ամբողջությամբ համընկնում են, այսինքն՝ դրանք հավասար են: Թեորեմն ապացուցված է:

Ներկայացնենք հարթաչափության առաջին թեորեմներից ևս մեկի ապացուցումը՝ հիմնված աքսիոմների վրա:

Թեորեմ: *Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր անկյունները հավասար են:*

Ապացուցում: Դիցուք՝ ABC-ն տրված հավասարասրուն եռանկյուն է, $AB=AC$ (նկ. 90): Ապացուցենք, որ $\angle B=\angle C$: Դիտարկենք կամայական ճառագայթ և նրա A_1 սկզբնակետից տեղադրենք $A_1B_1=AB$ հատվածը (աքսիոմ 12): A_1B_1 ճառագայթից տեղադրենք BAC անկյանը հավասար $B_1A_1C_1$ անկյունը (աքսիոմ 13), իսկ A_1C_1 ճառագայթի վրա՝ $A_1C_1=AC$ հատվածը (աքսիոմ 12): B_1 և C_1 կետերը միացնենք հատվածով և BAC անկյունը $B_1A_1C_1$ անկյանը վերադրենք այնպես, որ AB կողմը վերադրվի A_1B_1 կողմին, իսկ AC կողմը՝ A_1C_1 կողմին (աքսիոմ 14): Քանի որ $AB=A_1B_1$ և $AC=A_1C_1$, ապա B կետը համընկնում է B_1 կետին, իսկ C կետը՝ C_1 կետին: Հետևաբար՝ BC հատվածը համընկնում է B_1C_1 հատվածին (աքսիոմ 11) և, ուրեմն, ABC եռանկյունը նույնպես համընկնում է $A_1B_1C_1$ եռանկյանը: Այդ դեպքում B անկյունը համընկնում է B_1 անկյանը, ուրեմն՝ $\angle B=\angle B_1$:



Նկ. 90

Այժմ BAC անկյունը $B_1A_1C_1$ անկյանը վերադրենք այնպես, որ AB կողմը վերադրվի A_1C_1 կողմին, իսկ AC կողմը՝ A_1B_1 կողմին (աքսիոմ 14): Քանի որ $AB=A_1C_1$ և $AC=A_1B_1$, ապա B կետը համընկնում է C_1 կետին, իսկ C կետը՝ B_1 կետին: Հետևաբար՝ BC հատվածը համընկնում է B_1C_1 հատվածին (աքսիոմ 11) և, ուրեմն, ABC եռանկյունը նույնպես համընկնում է $A_1B_1C_1$ եռանկյանը: Այդ դեպքում C անկյունը համընկնում է B_1 անկյանը, ուրեմն՝ $\angle C=\angle B_1$:

Այսպիսով՝ $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle B_1$, դրանից հետևում է, որ $\angle B=\angle C$: Թեորեմն ապացուցված է:

Երկրաչափության դասընթացի դեռևս սկզբում մենք սահմանել ենք հատվածի միջնակետը և անկյան կիսորդը: Իսկ ինչի՞ց է հետևում, որ հատվածն ունի միջնակետ, և անկյունը՝ կիսորդ: Պատասխան տանք այս հարցերին:

Խնդիր 6

Ապացուցել, որ ցանկացած հատված ունի միջնակետ:

Լուծում: Վերցնենք կամայական AB հատված և ապացուցենք, որ այն ունի միջնակետ: AB հատվածն ընդունենք որպես հատվածների չափման միավոր: Այդ դեպքում գոյություն ունի PQ հատված, որի երկարությունն ըստ հատվածների չափման AB միավորի արտահայտվում է 0,5

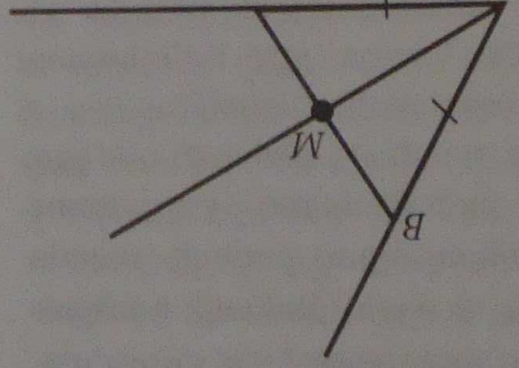
բիսի (պրոյոտ 19)։ AB ճառագայթի միս A կետից տեղադրեք $AM=PQ$ հատվածը (պրոյոտ 12)։ M կետը AB հատվածի միջնուկետն է։

Խնդիր 7

Լուսաբանել որ ցանկացած չափած անկյուն ունի միայն:

Լուծում։ Վերցնենք O գագաթով կամայական անկյուն և պատկերենք, որ այն միայն ունի։ Էյդ անկյան ներքին տեղի միս գշեղ կամայական անկյուն A կետ (տես խնդիր 1-ը), նսկ ճյուս ծողմից միս տեղադրեք $OB=OA$ հատվածը (նկ. 91)։

A և B կետերը միացնենք հատվածով։ OAB եռանկյունը հավասարասրուն է, որտեղ՝ $\angle A=\angle B$։ Դիցուք՝ M կետը AB հատվածի միջնուկետն է (տե՛ս խնդիր 6-ը)։ Որովհետև M կետը ընկած է A և B կետերի միջև, որեմն այն ընկած է AOB անկյան ներքին սրիրույթում։ OM ճառագայթն անցնում է AOB անկյան ներքին սրիրույթի M կետով, որեմն՝ այդ ճառագայթը AOB անկյունը տրոհում է երկու անկյունների (տե՛ս նկ. 91)։ Ստացված AOM և BOM եռանկյունները հավասար են՝ ըստ խնդիր 5-ը)։ Ստուգենք՝ արդյոք հավասարությունները (երկրաչափական եռանկյունների հավասարության առջին հայտանիշի) $\angle AOM=\angle BOM$։ Ստացանք՝ OM ճառագայթը



նկ. 91

Այժմ վերհիշենք եռանկյան կիսորդների մի կետում հատվելու մասին պնդման ապացուցումը: Այդ ապացուցումը մենք սկսել ենք այսպես. «*O* պնդման ապացուցումը: Այդ ապացուցումը մենք սկսել ենք այսպես. «*O* տառով նշանակենք *ABC* եռանկյան AA_1 և BB_1 կիսորդների հատման կետը»: Սակայն, որտեղի՞ց գիտենք, որ այդ կիսորդները հատվում են. իսկ եթե դրանք չհատվե՞ն...

Ապացուցենք, որ այդպիսի բան լինել չի կարող:

Խնդիր 9

Ապացուցել, որ եռանկյան ցանկացած երկու կիսորդներ հատվում են:

Լուծում: Վերցնենք կամայական *ABC* եռանկյուն և տանենք *A* անկյան կիսորդը (տե՛ս խնդիր 7-ը): Այդ կիսորդը հատում է *BC* կողմը մի որևէ A_1 կետում (տե՛ս խնդիր 8-ը): Համաձայն դրան՝ *B* անկյան կիսորդը հատում է *AC* կողմը մի որևէ B_1 կետում: AA_1 ճառագայթը ABB_1 եռանկյան *A* անկյան կիսորդն է, ուրեմն՝ այն հատում է BB_1 հատվածը: Հետևաբար AA_1 և BB_1 ուղիղների ընդհանուր կետն ընկած է BB_1 հատվածի վրա: BB_1 ճառագայթը ABA_1 եռանկյան *B* անկյան կիսորդն է, ուրեմն՝ այն հատում է AA_1 հատվածը: Հետևաբար՝ AA_1 և BB_1 ուղիղների ընդհանուր կետն ընկած է AA_1 հատվածի վրա: Այսպիսով՝ AA_1 և BB_1 ուղիղների ընդհանուր կետն ընկած է ինչպես BB_1 հատվածի, այնպես էլ AA_1 հատվածի վրա: Նշանակում է՝ AA_1 և BB_1 հատվածները, այսինքն՝ *ABC* եռանկյան կիսորդները, հատվում են, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Ուղիղ պրիզմայի ծավալի վերաբերյալ հարցը դիտարկելիս (կետ 28, հետևանք 2) մեր ելակետն այն էր, որ հավասար հիմքերով և հավասար բարձրություններով երկու ուղիղ պրիզմաները հավասար են: Ապացուցենք այդ պնդումը:

Խնդիր 10

Ապացուցել, որ եթե ուղիղ եռանկյուն պրիզմաներից մեկի հիմքը և բարձրությունը համապատասխանաբար հավասար են մյուսի հիմքին և բարձրությանը, ապա այդպիսի պրիզմաները հավասար են:

Լուծում: Դիցուք՝ *ABCDEF* և $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ուղիղ եռանկյուն պրիզմաներն ունեն *ABC* և $A_1B_1C_1$ հավասար հիմքեր ու *AD* և A_1D_1 հավասար բարձրություններ, ընդ որում՝ $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ և $\angle A=\angle A_1$: *D*, *E* և *F* կետերն ընդգրկող կիսատարածությունը, որի սահմանը *ABC* հարթությունն է, նշանակենք *H* տառով, իսկ D_1, E_1 և F_1 կետերն ընդգրկող կիսատարածությունը, որի սահմանը $A_1B_1C_1$ հարթությունն է, նշանակենք H_1:

Դիտարկենք մի վերադրում, որի դեպքում *A* անկյունը համընկնում է A_1 անկյանն այնպես, որ *AB* ճառագայթը համընկնում է A_1B_1 ճառագայթին, *AC* ճառագայթը՝ A_1C_1 ճառագայթին, իսկ *H* կիսատարածությունը համընկնում է H_1 կիսատարածությանը: Այդպիսի վերադրումը գոյություն ունի՝ ըստ աքսիոմ 14-ի: Այս վերադրման դեպքում *ABC* եռանկյունը (այսինքն՝ նրա կողմերն ու ներքին տիրույթը) համընկնում է իրեն հավասար $A_1B_1C_1$

եռանկյանը: Այնուհետև՝ AD ճառագայթը համընկնում է մի որևէ A_1D_2 ճառագայթի, որը դասավորված է H_1 կիսատարածության մեջ: Ուրեմն՝ DAB և DAC անկյունները, համապատասխանաբար, համընկնում են $D_2A_1B_1$ և $D_2A_1C_1$ անկյուններին: Բայց քանի որ DAB և DAC անկյունները ուղիղ անկյուն են, ապա $D_2A_1B_1$ և $D_2A_1C_1$ անկյունները ևս ուղիղ անկյուն են, ուրեմն, A_1D_2 ճառագայթը ուղղահայաց է $A_1B_1C_1$ հարթությանը և, հետևապես, այն համընկնում է A_1D_1 ճառագայթին: Այսպիսով, նշված վերադրման դեպքում AD ճառագայթը համընկնում է A_1D_1 ճառագայթին, իսկ քանի որ $AD=A_1D_1$, ապա D կետը համընկնում է D_1 կետին: Համանմանորեն՝ E և F կետերը համընկնում են, համապատասխանաբար, E_1 և F_1 կետերին: Հետևաբար՝ մի պրիզմայի DEF հիմքը և կողմնային կողերը համապատասխանաբար համընկնում են մյուս պրիզմայի $D_1E_1F_1$ հիմքին ու կողմնային կողերին: Այժմ դժվար չէ ապացուցել, որ այդ դեպքում համընկնում են նաև համապատասխան կողմնային նիստերը, ինչպես նաև պրիզմաների ներքին կետերը: Դա կարելի է անել նման այն բանին, ինչպես եռանկյունների հավասարության առաջին հայտանիշի թեորեմն ապացուցելիս ցույց տրվեց, որ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների ներքին տիրույթները համընկնում են:

Այսպիսով՝ $ABCDEF$ և $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ պրիզմաները ամբողջությամբ համընկնում են, այսինքն՝ նրանք հավասար են:

Համանման ձևով կարելի է ապացուցել համապատասխանաբար հավասար չափումներով երկու ուղղանկյունանիստերի հավասարությունը և հավասար հիմքերով ու հավասար բարձրություններով երկու կանոնավոր բուրգերի հավասարությունը:

8-րդ դասարանում (երկրաչափություն-8, հավելված 1) խոսվել է այն մասին, որ մեր կողմից ընդունված որոշ աքսիոմներ կարող են ապացուցվել մյուս աքսիոմների հիման վրա, այսինքն՝ տվյալ պնդումները, փաստորեն, թեորեմներ են, այլ ոչ թե աքսիոմներ: Օրինակ՝ կարող էր որպես թեորեմ լինել աքսիոմ 5-ի պնդումը: Համոզվենք, որ, իրոք, այդպես է:

Խնդիր 11

Ապացուցել, որ եթե ուղղի երկու կետերը պատկանում են հարթությանը, ապա ուղղի բոլոր կետերը պատկանում են այդ հարթությանը:

Լուծում: Դիցուք A-ն և B-ն α հարթության մեջ ընկած երկու կետեր են: Ապացուցենք, որ AB ուղղի բոլոր կետերը նույնպես ընկած են α հարթության մեջ: Ըստ աքսիոմ 2-ի՝ գոյություն ունի C կետ, որ ընկած չէ α հարթության մեջ: A, B և C կետերով անցնում է մի որևէ β հարթություն (աքսիոմ 4): α և β հարթություններն ունեն ընդհանուր կետ (օրինակ՝ A կետը), ուրեմն՝ նրանք ունեն ընդհանուր ուղիղ, որին պատկանում են այդ հարթությունների բոլոր ընդհանուր կետերը (աքսիոմ 6): A և B կետերը α և β հարթությունների ընդհանուր կետեր են: Հետևաբար՝ դրանք պատկանում են նշված ուղղին: Սակայն, A և B կետերով անցնում է միայն մեկ ուղիղ

(աքսիոմ 3). դա AB ուղիղն է: Դրանով հենց AB ուղղի բոլոր կետերը α և β հարթությունների ընդհանուր կետեր են: Դրանից հետևում է, որ AB ուղղի բոլոր կետերը պատկանում են α հարթությանը: Պնդումն ապացուցված է:

Թեորեմներ են նաև աքսիոմ 8-ի և աքսիոմ 10-ի պնդումները: Դրանում համոզվեք ինքնուրույն:

Պարզաբանում

Եթե ձգտենք այն բանին, որ աքսիոմների քանակը հասնի նվազագույնի, ապա հարկավոր կլինի աքսիոմ 17-ը ձևակերպել այլ կերպ.

Եթե Φ_1 պատկերը հավասար է Φ_3 պատկերին, և Φ_2 պատկերը հավասար է Φ_3 պատկերին, ապա Φ_1 պատկերը հավասար է Φ_2 պատկերին:

Այսպիսի ձևակերպման դեպքում կարելի է արդեն հրաժարվել աքսիոմ 16-ից. այն փոխակերպվում է թեորեմի: Իսկապես, ենթադրենք, թե Φ պատկերը հավասար է Φ_1 պատկերին, և ապացուցենք, որ այդ դեպքում Φ_1 պատկերը հավասար է Φ պատկերին: Ունենք՝ $\Phi_1 = \Phi_1$ (աքսիոմ 15), $\Phi = \Phi_1$ ըստ պայմանի: Հետևաբար՝ $\Phi_1 = \Phi$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Այսպիսով՝ երկրաչափության դասընթացը կառուցելու համար բավական էր ձևակերպել ընդամենը 16, այլ ոչ թե 20 աքսիոմներ:

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

ԳԼՈՒԽ I

1. ա) C, բ) E, գ) B, դ) A,C,E,H, ե) B,E,G, զ) B,C,D: **3.** $B_1(1;0;1)$, $C(0;1;1)$, $C_1(1;1;1)$, $D_1(1;1;0)$: **4.** $\vec{a}\{3;2;-5\}$, $\vec{b}\{-5;3;-1\}$, $\vec{c}\{1;-1;0\}$, $\vec{d}\{0;1;1\}$, $\vec{m}\{-1;0;1\}$, $\vec{n}\{0;0;0,7\}$: **10.** ա) {7;-2;1}, բ) {-7;2;-1}, գ) {5;-1,2;1}, դ) $\left\{-5\frac{1}{3};3\frac{2}{5};-1\frac{1}{7}\right\}$, ե) $\left\{\frac{1}{3};-2,2;\frac{1}{7}\right\}$, զ) {7;-1,8;1}, է) {7;-2,2;1}, ը) {10;-2;2}, բ) {6;-3;0}, ժ) {0;-1,2;0}, ի) $\left\{\frac{1}{9};-\frac{4}{5};\frac{1}{21}\right\}$, լ) {-0,4;0,2;0}:

11. $\vec{p}\{4;-18;-9\}$, $\vec{q}\{5;15;-5\}$: **12.** ա) {0;5;-1}, բ) {-3;2;1}, գ) {7,8;2,5;4,1}, դ) {-3;9;-3}: **13.** $-\vec{i}\{-1;0;0\}$, $-\vec{j}\{0;-1;0\}$, $-\vec{k}\{0;0;-1\}$, $-\vec{a}\{-2;0;0\}$, $-\vec{b}\{3;-5;7\}$, $-\vec{c}\{0,3;0;-1,75\}$: **14.** գ) Ոչ, դ) այո, ե) ոչ: **15.** ա) m=10, $n=1\frac{1}{5}$, բ) m=0,1, n=-2 : **16.** ա) Այո, բ) ոչ, գ) այո, դ) ոչ, ե) ոչ: **19.** ա) {-1;0;2}, բ) {5;-7;2}, գ) $\left\{-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right\}$: **20.** $\vec{AB}=\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{BC}=-5\vec{i}+\vec{j}+6\vec{k}$, $\vec{CA}=4\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$: **21.** Այո: **22.** բ) Այո, գ) ոչ: **23.** ա) Այո, բ) ոչ, գ) այո: **24.** *Ցուցում*: Օգտվեք 9-րդ դաս. 366 խնդրից: **25.** ա) M(-1;2,5;-2), բ) B(-8;4;-19), գ) A(-24;8;28): **26.** ա) m=2, n=-5, բ) m=-0,5; n=2, գ) m=1, n=-1, դ) m=2, n=-1: **27.** ա) 3, բ) 17: **28.** $\left|\vec{a}\right|=5\sqrt{3}$, $\left|\vec{b}\right|=7$, $\left|\vec{c}\right|=\sqrt{3}$,

$\left|\vec{d}\right|=2$, $\left|\vec{m}\right|=\sqrt{5}$: **29.** ա) $\sqrt{6}$, բ) $2\sqrt{14}$, գ) 0, դ) $5\sqrt{2}$, ե) $3\sqrt{14}$, զ) 14, է) $\sqrt{326}$: **30.** $\sqrt{14}$: **31.** ա) $3+2\sqrt{2}$, բ) 0,5, $\frac{\sqrt{73}}{4}$, $\frac{\sqrt{73}}{4}$: **32.** ա) Կամայական, բ) ուղղանկյուն տարակողմ, գ) ուղղանկյուն տարակողմ, դ) ուղղանկյուն հավասարասրուն: **33.**ա) 4, 4, 3, բ) $4\sqrt{2}$, 5, 5: **34.** (0;2;-3), (-1;2;0), (-1;0;-3): **35.** (3;0;0), (0;-4;0), $\left(0;0;\sqrt{7}\right)$: **36.** 3,75; 2; 4; $1-2\sqrt{2}$ և $1+2\sqrt{2}$: **37.** Ցուցում: Ապացուցել, որ. ա)A, B և C կետերը ընկած չեն մի ուղղի վրա, բ) $\vec{AB}$-ն և $\vec{DC}$ անհավասար համուղղված վեկտորներ են, գ) $\left|\vec{AD}\right|=\left|\vec{CB}\right|$: **38.** ա) (-1,6;0;0), բ) (0;8;0), գ) (0;0;1): **39.** ա) $\left(\frac{3}{8};\frac{17}{8};0\right)$, բ) $\left(0;1;\frac{3}{2}\right)$, գ) $\left(-\frac{1}{3};0;\frac{17}{6}\right)$: **40.** ա) (2;3;0), $\sqrt{13}$, բ) (2;3;-1): **41.** $\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+m^2}$: **42.** ա) A և C, բ) B, գ) B և D: **43.** ա) C, բ) B, գ) A և D: **45.** ա) (-4;-3), (-4;3), բ) (4;3), (-4;3): **46.** ա) (3;0), (3;10), բ) (-2;5), (8;5): **47.** 1) $x^2+y^2=9$, 2) $x^2+y^2=2$, 3) $x^2+y^2=\frac{25}{4}$: **48.** ա) $x^2+(y-5)^2=9$, բ) $(x+1)^2+(y-2)^2=4$, գ) $(x+3)^2+(y+7)^2=\frac{1}{4}$, դ) $(x-4)^2+(y+3)^2=100$: **49.** $x^2+y^2=10$: **50.** ա) $(x-2)^2+(y-1)^2=41$, բ) $(x-3)^2+(y-1)^2=5$: **51.** $(x-5)^2+y^2=25$, $(x+3)^2+y^2=25$, երկու շրջանագիծ: **52.** $x^2+(y-4)^2=25$: **53.** բ) $x+y-7=0$, գ) $3x-2y+2=0$: **54.** $7x-y+3=0$: **55.** ա) $x-y=0$, $y-1=0$, բ) $3x-5y+5=0$: **56.** (3;-2): **57.** $x=2$ և $y=5$: **58.** 7: **59.** $5x+2y-10=0$, $5x-2y-10=0$, $5x+2y+10=0$, $5x-2y+10=0$ կամ $2x+5y-10=0$, $2x-5y-10=0$, $2x+5y+10=0$, $2x-5y+10=0$: **60.** Շրջանագծեր են. ա), բ), դ), ե): **61.** $(x-3)^2+(y-5)^2=25$: **62.** ա) $\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{125}{2}$,

բ) $(x-3)^2+(y+2)^2=25$: **63.** ա) $5x-3y+16=0$, $x+2y-6=0$, $6x-y+10=0$, բ) $3x+5y-4=0$, $2x-y-7=0$, $x+6y-23=0$, գ) $3x+5y-17=0$, $2x-y+6=0$, $x+6y-10=0$: **66.** ա) 45^0, բ) 135^0, գ) 60^0, դ) 45^0, ե) 90^0, զ) 90^0, է) 0^0, ը) 180^0: **67.** $\hat{\vec{BA}\,\vec{DC}}=\varphi$, $\hat{\vec{BA}\,\vec{CD}}=\hat{\vec{AB}\,\vec{DC}}=180^0-\varphi$: **68.** ա) a^2, բ) $-2a^2$, գ) 0, դ) a^2, ե) a^2, զ) $-\frac{a^2}{2}$, է) $-\frac{3}{2}a^2$: **69.** $\vec{a}\cdot\vec{c}=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=3$, $\vec{a}\cdot\vec{a}=6$, $\sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}}=\sqrt{3}$: **70.** ա) -10, բ) 3, գ) 1, դ) -4, ե) 28: **71.** ա) Բութ, բ) սուր, գ) ուղիղ: **73.** ա) 5,5; բ) 3,5; գ) 4: **74.** m=4: **75.** Ցուցում: Ապացուցեք, որ $\vec{AB}=\vec{DC}$, $\vec{AB}\cdot\vec{AD}=0$, $\left|\vec{AB}\right|=\left|\vec{AD}\right|$: **76.** ա) 60^0, բ) 135^0, գ) 150^0, դ) 45^0, ե) 90^0: **77.** $\hat{\vec{a}\,\vec{i}}\approx 50^0 46'$, $\hat{\vec{a}\,\vec{j}}\approx 63^0 26'$, $\hat{\vec{a}\,\vec{k}}\approx 50^0 46'$: **78.** 60^0: **79.** $\angle A=120^0$, $\angle B=\angle C=30^0$, $P=2\sqrt{2}\left(2+\sqrt{3}\right)$, $S=2\sqrt{3}$: **80.** ա) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, բ) $-\frac{1}{3}$, գ) 0: **81.** 90^0: **82.** 3: **84.** ա) 1, $\frac{1}{2}$, բ) $\sqrt{3}, \sqrt{2}$: **86.** Ցուցում: $\vec{MN}$ և $\vec{BC}$ վեկտորները արտահայտեք $\vec{a}=\vec{DA}$, $\vec{b}=\vec{DB}$, $\vec{c}=\vec{DC}$ վեկտորներով: **87.** ա) -1; բ) $-1,5$; գ) 4; դ) $\sqrt{2}$; ե) 2; զ) $-\frac{1}{4}$; է) $\frac{\sqrt{2}}{4}$: **89.** ա) 30^0, բ) 60^0, գ) 0^0, դ) 45^0: **91.** ա) $\frac{3}{\sqrt{29}}$, բ) $\frac{2}{\sqrt{58}}$, գ) $\frac{1}{\sqrt{87}}$, դ) $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{29}}$: **92.** ա) $\approx 71^0 34'$, բ) $\approx 59^0 44'$: **93.** ա) $\frac{3}{\sqrt{70}}$, բ) $\frac{9}{\sqrt{130}}$, գ) $\frac{5}{\sqrt{182}}$: **94.** ա) $\frac{10}{\sqrt{134}}$, բ) $\frac{3}{\sqrt{134}}$, գ) $\frac{5}{\sqrt{134}}$: **95.** ա) $\frac{1}{3}$, բ) $\frac{2}{3}$, գ) $\frac{2}{3}$: **96.** Ցուցում: Դիցուք $ABCDA_1B_1C_1D_1$-ը

տրված խորանարդն է: Պահանջվում է ապացուցել, օրինակ, որ $AC_1 \perp A_1B$: $\vec{AC_1}$ և $\vec{A_1B}$ վեկտորները վերածեք ըստ $\vec{a} = \vec{AB}, \vec{b} = \vec{AD}$, $\vec{c} = \vec{AA_1}$ վեկտորների և ապացուցեք, որ $\vec{AC_1} \cdot \vec{A_1B} = 0$: **98.** 60^0: **100.** $\frac{1}{3}\sqrt{70+15\sqrt{2}}$: **101.** 45^0: **102.** Ցուցում: Ապացուցեք, որ $\vec{AK} \cdot \vec{BD} = 0$: **104.** Ցուցում: Դիտարկեք համաչափության կենտրոնով և տրված ուղղով անցնող հարթությունը: **106.** Ցուցում: Օգտվեք շարժումների հետևյալ հատկություններից. շարժման դեպքում ուղիղը արտապատկերվում է ուղղի, զուգահեռ ուղիղները զուգահեռ ուղիղների, իսկ անկյունը՝ իրեն հավասար անկյան: **109.** Ցուցում: Նկատեք, որ զուգահեռ տեղափոխությունը շարժում է, հետևաբար զուգահեռ տեղափոխման դեպքում ուղիղը արտապատկերվում է ուղղի վրա:

110. Ցուցում: Ապացուցեք, որ $\vec{MM_1} = \vec{AA_1} = \vec{p}$: **113.** Ցուցում: ա), բ) Ապացուցումը կատարեք հակասող ենթադրության մեթոդով: **125.** ա) {3; 9; –24}; բ) {-1, 6;-2,3; 4,3}: **126.** ա) Ոչ, բ) այո, գ) այո, դ) ոչ: **127.** ա) (-1; 0; 0); բ) (0; -2; 0); (0; 0; 2): **128.** ա) Այո, բ) այո, գ) ոչ: **129.** Ցուցում: Ապացուցեք, որ ա) A, B և C կետերը ընկած չեն մեկ ուղղի վրա, բ) AC և BD հատվածների միջնակետերը համընկնում են: **130.** $\left(\frac{7}{3}; \frac{5}{3}; 3\right)$: **131.** C(6; 5; 5), D_1(9; 4; 1), B_1(4; 7; 4), C_1(8; 8; 4): **132.** ա) 1; բ) –2; գ) 0: **133.** $\left\{\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{3}{\sqrt{10}}; 0\right\}$: **134.** 4 կամ –4: **135.** 1: **136.** $2\sqrt{7}, \sqrt{7}, \sqrt{29}$: **137.** (0;42,4;0): **138.** (1;1,5;1,5): Ցուցում: Նկատեք, որ $\angle ACB = 90^0$: **139.** 6 դմ: **140.** Ցուցում: Ներմուծեք կոորդինատների համակարգ և տրված ABCD բառանիստի գագաթների կոորդինատները նշանակեք այսպես. $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2, z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$: Հաշվի առեք, որ միջնագծերի հատման կետն

ունի՝ $\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4};\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4};\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$ կոորդի-

նատները: **141.** ա) 3; բ) –3,5; գ) 5; դ) 7; ե) –10: **142.** ա) 135^0, բ) 60^0, գ) $67^0 30'$: **143.** ա) Այո, բ) այո, գ) այո, դ) ոչ: **144.** ա) $\frac{2}{\sqrt{114}}$, բ) $\frac{5}{9}$: **145.** ա) 90^0, բ) $\approx 114^0 06'$: **146.** ա) $\sqrt{6}$, բ) $\sqrt{2}$: **147.** ա) $\frac{7}{65}$, բ) $\frac{5}{13}$, գ) $\frac{4}{13}$, դ) $\frac{3}{13}$: **148.** ա) $\frac{2}{\sqrt{38}}$, բ) $\frac{3}{\sqrt{38}}$: **150.** 45^0: **151.** $\sin\theta\cos\varphi$: **152.** $\sqrt{n^2+m^2+p^2+pn}$: **153.** Ցուցում: Ապացուցեք հակասող ենթադրության մեթոդով, բ) դիցուք M-ը a ուղղի և α հարթության հատման կետն է, A-ն՝ a ուղղի կետ է, B-ն և C-ն՝ α հարթության M-ից տարբեր կետեր են: AMB և AMC եռանկյունների համար կիրառեք Պյութագորասի թեորեմը: **154.** Ցուցում: Դիտարկեք α և β, α և β_1 հարթություններով առաջացած երկնիստ անկյունների գծային անկյունները: **155.** Ցուցում: α հարթության վրա վերցրեք երկու հատվող ուղիղներ և օգտվեք 109 խնդրից:

Գ Լ Ո Ւ Խ II

156. 5մ: **157.** ա) 24սմ, բ) $12\sqrt{3}$ սմ, գ) 432π սմ^2: **158.** ա) $10\sqrt{2}$ սմ, բ) 50π սմ^2: **159.** Ոչ: **160.** $\sqrt{5\pi}$ մ: **161.** ա) 30^0, բ) 60^0: **162.** ա) 5դմ, բ) 3սմ: **164.** 64սմ^2: **165.** 8սմ: **166.** 15դմ: **167.** $\frac{1}{\cos\varphi}$: **168.** $\sqrt{S^2-4h^2d^2}$: **169.** $2\sqrt{3}dh$: **170.** 40սմ^2: **171.** $S\sqrt{2}$: **172.** π^2մ^2: **173.** $\frac{S}{\pi}$: **174.** $1{,}125\pi$ կգ: **175.** 6սմ, 18սմ: **176.** $0{,}82\pi$ մ$^2 \approx 2{,}58$մ^2:

177. $4S\operatorname{ctg}\varphi$: **178.** $S_{կողմ}=\frac{1}{2}d^2\sin\varphi$, $S_{գլ}=\frac{1}{2}d^2\sin\varphi+\frac{1}{2\pi}d^2\sin^2\frac{\varphi}{2}$ կամ $S_{գլ}=\frac{1}{2}d^2\sin\varphi+\frac{1}{2\pi}d^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$: **179.** $\frac{d^2}{8\pi}$: **180.** ա) $2a^2$, բ) $2\pi a^2$, գ) $4\pi a^2$: **181.** բ) $\frac{b}{a}$: **182.** 17սմ: **183.** ա) $108\ \pi$ սմ^2, բ) 72π սմ^2, գ) 36π սմ^2: **184.** ա) $4\sqrt{2}$ դմ, բ) 4դմ: **185.** 25սմ^2: **186.** ա) r^2, բ) $r^2\sqrt{2}$, գ) $r^2\sqrt{3}$: **187.** $2h^2$: **188.** $6\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ դմ: **189.** ա) $\frac{r\sqrt{4\ell^2-r^2}}{4}$, բ) $\frac{r\sqrt{2\ell^2-r^2}}{2}$: **190.** ա) 200սմ^2, բ) $\frac{100}{3}\sqrt{6}$ սմ^2, գ) $\frac{200\sqrt{3}}{9}$ սմ^2: **193.** $\alpha=216^0$: **194.** 180^0: **195.** ա) 60^0, բ) $2\arcsin\frac{1}{4}$, գ) $2\arcsin\frac{1}{6}$: **196.** 9π սմ^2, $6\sqrt{2}$ սմ: **197.** $\frac{169\pi\sqrt{2}}{8}$ սմ^2: **198.** $0{,}9\pi$ սմ^2: **199.** $\frac{\pi a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\alpha\cos\varphi}$: **200.** $S_{կողմն}=80\pi$ սմ^2, $S_{կոն}=144\pi$ սմ^2: **201.** $2\pi m^2\sin\varphi$: **202.** 5սմ: **203.** ա) 8սմ, բ) 128սմ^2: **204.** R^2-r^2: **205.** 60սմ^2: **206.** $33\sqrt{2}\pi$ սմ^2, $\left(33\sqrt{2}+65\right)\pi$ սմ^2: **207.** $2{,}55\pi$ կգ≈8,011կգ: **209.** ա) $10\sqrt{21}$ սմ, բ) 12մմ, գ) 16դմ, դ) $\sqrt{a^2-b^2}$: **210.** $\frac{\sqrt{4R^2-m^2}}{2}$: **211.** ա)$(x-2)^2+(y+4)^2+(z-7)^2=9$, բ) $x^2+y^2+z^2=2$, գ) $(x-2)^2+y^2+z^2=16$: **212.** ա) $(x+2)^2+(y-2)^2+z^2=54$, բ) $(x+2)^2+(y-2)^2+z^2=8$, գ) $x^2+y^2+z^2=35$: **213.** ա) (0; 0; 0); 7; բ) (3; −2; 0), $\sqrt{2}$: **214.** ա) (2; 0; 0); 2; բ) (0; 1; 0); 5; գ) (-1; 0; 0); 2; դ) $\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2};1\right)$, $\sqrt{6}$: **215.** 1600π դմ^2: **216.** 12սմ: **217.** 6սմ: **218.** 4սմ: **219.** 3սմ: **220.** 8սմ: **221.** ա) Հարթությունը գնդային մակերևույթին շոշափող հարթություն է, բ), գ) հարթությունը հատում է գնդային մակերևույթը, դ) հարթությունը և գնդային մակերևույթը չունեն ընդհանուր կետեր: **22.** ա) 80π սմ^2,

բ) $\sqrt{\frac{12}{\pi}+4}$ սմ: **223.** ա) $\frac{\sqrt{3}}{2}R$, բ) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}R^2$: **224.** ա) $2\sqrt{3}\pi$ սմ, բ) $5\sqrt{2}\pi$ մ:

225. $\pi R^2\sin^2\varphi$: **226.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}$: **227.** 1սմ: **228.** ա) 144π սմ^2,

բ) 16π դմ^2, գ) 8π մ^2, դ) 48π սմ^2: **229.** 36մ^2: **230.** $\frac{9}{\sqrt{\pi}}$ սմ: **232.** 10մ:

233. 900π սմ^2: **234.** $4\pi\left(r_1^2+r_2^2\right)$: **236.** $\frac{\sqrt{3}S}{2}$: **237.** $a\frac{\sqrt{3}}{3}$:

239. $\sqrt{\frac{S_1^2+S_2^2}{2\pi(S_1+S_2)}}$: **240.** ա) $\frac{3}{2}$, բ) 2 կամ $\frac{5}{4}$: **241.** $\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$: **242.** $\frac{P}{2}$

կամ $\frac{P}{4}$: **243.** 414π սմ^2: **245.** $-\frac{1}{3}$: **246.** $\frac{\sqrt{S_0^2-S_1^2}}{\pi}$: **247.** $\arccos\frac{1}{7}$:

248. $4\sqrt{6}$ սմ^2: **249.** $\arcsin\frac{3}{4}$: **250.** $\frac{\pi ab(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$: **251.** $40\sqrt{3}\pi$ սմ^2:

252. ա) $9\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{73}+3\right)$սմ^2, բ $\left(18+6\sqrt{41}\right)$սմ^2, գ) $\frac{9}{2}\left(\sqrt{91}+3\sqrt{3}\right)$սմ^2:

253. $12\sqrt{10}\pi$ դմ^2, $4\left(3\sqrt{10}+5\right)\pi$ դմ^2: **255.** ա) Ցուցում: Ապացուցեք, որ գնդային մակերևույթի տրամագիծը հավասար է եռանկյան ներքնաձիգին, բ) $2\sqrt{10}$ սմ: **257.** (3; 0; 0), (0; 0; –9), (0; 0; –1):

258. $4\sqrt{2}$: **260.** բ) 0,6R: **261.** ա) $2R\sqrt{\frac{3-4\sin^2\varphi}{3}}, 4R\sin\varphi\sqrt{\frac{3-4\sin^2\varphi}{3}}$,

բ) $\frac{16}{9}\pi R^2\sin^2\varphi\left(3-4\sin^2\varphi\right)$: **262.** $\frac{240\pi}{13}$ սմ: **265.** $\frac{4\sqrt{10}+4\sqrt{17}+8}{15\pi}$:

266. ա) $\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\left(29+7\sqrt{73}\right)$սմ^2, բ) $\left(58+14\sqrt{41}\right)$սմ^2, գ) $\frac{21\sqrt{91}+87\sqrt{3}}{2}$սմ^2:

269. ա) $24R^2$, բ) $12\sqrt{3}R^2$, գ) $24\sqrt{3}R^2$: **270.** ա) $\frac{4R^2\cos\alpha}{(1-\sin\alpha)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$,

բ) $100\sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right)$ սմ²: **271.** Ցուցում: Դիտարկեք տրված բուրգի հատույթն այն հարթությամբ, որն անցնում է հիմքի կողմի միջնակետով և ուղղահայաց է դրան: **274.** ա) $8R^2$, բ) $\frac{21\sqrt{3}}{4}R^2$, գ) $\frac{8\sqrt{3}}{3}R^2$:

275. $\frac{3\sqrt{5}-1}{4\sqrt{33}}\cdot a$, $\frac{2\sqrt{33}}{11}a$: **276.** 6սմ, $4\sqrt{3}$ սմ կամ 8սմ, $4\sqrt{2}$ սմ: **277.** $\frac{2}{3}$:

278. ա) $Rtg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{4}\right)$, բ) $rtg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{4}\right)$, գ) 60^0: **279.** $\frac{2\pi r^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{tg^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}$:

280. $\frac{3}{4}$: **281.** ա) $R\sin\varphi$, բ) $\frac{r}{\sin\varphi}$, գ) 30^0 կամ 150^0:

ԳԼՈՒԽ III

282. ա) $V=V_1+V_2$, բ) $V=\frac{2}{3}V_1+V_2$: **283.** ա) 1980, բ) 300, գ) $1170\sqrt{3}$, դ) $3,2\sqrt{5}$: **284.** ա) $432\sqrt{2}$ սմ³, բ) $6\sqrt{6}$ մ³, գ) $0,32\sqrt{5}$ սմ³:

285. 12սմ: **286.** 3,51կգ: **287.** $240\sqrt{2}$ սմ³: **288.** $729\sqrt{2}$ սմ³:

289. $\frac{h^3\sin\alpha\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}}{\sin^2\beta}$: **290.** $ab\sqrt{3a^2-b^2}$: **291.** $432\sqrt{3}$ սմ³:

292. ա) $\frac{1}{8}\sqrt{2}$ մ³, բ) $1728\sqrt{2}$ սմ³: **293.** 2310սմ³: **294.** ա) $\frac{75\sqrt{3}}{4}$ սմ³, բ) $1,5\sqrt{2}$: **295.** $0,5m^3\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}$: **296.** $\frac{\ell^3\sin\beta\cos^2\beta}{4tg\frac{\alpha}{2}}$:

297. $\frac{Q^2\sin2\beta}{2\alpha}$: **298.** ա) $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$, բ) a^3, գ) $1,5\sqrt{3}a^3$, դ) $\frac{2a^3}{tg22^030'}$:

299. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$: **300.** 72սմ^3: **301.** ա) 24πսմ^3, բ) $\frac{10}{\sqrt{3\pi}}$ սմ, գ) 2սմ:

302. ≈208մ: **303.** ≈1513տ: **304.** $\frac{1}{2}S\sqrt{\pi Q}$: **305.** ≈61կգ:

306. ա) $3\sqrt{3}:4\pi$, բ) $2:\pi$, գ) $3\sqrt{3}:2\pi$, դ) $2\sqrt{2}:\pi$, ե) $\left(\frac{1}{2}n\sin\frac{360^0}{n}\right):\pi$:

307. $\frac{\pi a^2 h}{4\cos^2\alpha}$: **308.** $\frac{\pi}{2}$: **309.** $\frac{\pi}{5}$: **311.** 192 $\sqrt{3}$ սմ^3: **312.** $\frac{ab\sqrt{12a^2-3b^2}}{8}$:

313. $\frac{1}{4}m^3 tg\varphi$: **314.** 1050սմ^3: **318.** $abc\sqrt{-\cos 2\varphi}$: **319.** $V=18\sqrt{39}$ սմ^3:

323. 1080սմ^3: Ցուցում: Օգտվեք նախորդ խնդրից: **324.** ա) 6մ^3, բ) 4950սմ^3: **325.** $169\sqrt{3}$ սմ^3: **326.** ա) $\frac{\sqrt{3}}{8}\ell^3\sin 2\varphi\cos\varphi$,

բ) $\frac{1}{3}\ell^3\cos^2\alpha\sqrt{3-4\cos^2\alpha}$, գ) $\frac{1}{3}\ell^3\sin^2\frac{\beta}{2}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\beta}{2}}$:

327. $\frac{a^3\sqrt{3-4\sin^2\frac{\varphi}{2}}}{24\sin\frac{\varphi}{2}}$: **328.** ա) $\frac{4H^3}{3tg^2\beta}$, բ) $\frac{m^3\sqrt{\cos\alpha}}{6\sin\frac{\alpha}{2}}$:

329. $\frac{2}{3}m^3\cos^2\varphi\sin\varphi$: **330.** $6\sqrt{471}$ սմ^2, $6\sqrt{498}$ սմ^2: **331.** $\frac{845\sqrt{3}}{6}$ սմ^3:

332. $\frac{1}{12}ab\sqrt{a^2+b^2}tg\varphi$: **333.** $arctg\frac{12V}{b^3\sin\alpha}$: **334.** 9սմ^3:

335. ա) $\frac{1}{24}c^3\sin 2\varphi tgQ$, բ) 48սմ^3, գ) $\frac{1}{6}abc$: **336.** $1400\sqrt{3}$ սմ^3:

337. $\frac{7\sqrt{47}a^3}{192}$: **338.** $\frac{1}{24}(m^3-n^3)tg\varphi$: **339.** 1260դմ^3: **340.** $38\sqrt{2}$ սմ^3:

341. ա) 2,25πսմ^3, բ) 9սմ, գ) $\sqrt{\frac{3p}{\pi m}}$: **342.** 375սմ^3: **343.** $\frac{\sqrt{\pi Q(P^2-Q^2)}}{3\pi}$:

344. $\frac{1}{12}\pi H^3$: **345.** 240πսմ^3 կամ 100πսմ^3: **346.** 216^0: **347.** $\frac{225\pi}{7}$ դմ^3:

348. 84πմ^3: **349.** $\frac{Sh}{\pi\ell}, \frac{1}{12}\pi h\left(\ell^2 - h^2 + \frac{3S^2}{\pi^2\ell^2}\right)$: **354.** ա) 64πսմ^2, $\frac{256\pi}{3}$ սմ^3, բ) ≈3սմ, ≈36πսմ^2, գ) 4սմ, $\frac{256\pi}{3}$ սմ^3: **355.** Երկրի ծավալը 64 անգամ մեծ է Լուսնի ծավալից: **356.** $H = \frac{4}{3}R$, որտեղ H-ը գլանի բարձրությունն է, R-ը՝ գնդի շառավիղը: **357.** Ոչ: **358.** Ձրի մակարդակը կբարձրանա $\frac{32}{75}$ սմ-ով: **359.** $\frac{942}{125}\pi$ մ^3: **360.** 5:16: **361.** 58500πսմ^3 կամ 504000πսմ^3:

362. $\frac{52}{81}\pi R^3$: **363.** 252πսմ^3 և 720πսմ^3: **364.** 112500πսմ^3:

365. $\frac{2-\sqrt{3}}{3}\pi R^3$: **366.** $6375^2\pi$կմ$^2 \approx 1{,}28\cdot10^8$կմ$^2 = 128\cdot10^6$կմ^2:

367. 432πսմ$^2 \approx 1357$սմ^2: **373.** $\sqrt{S_1\cdot S_2\cdot S_3}$; 36դմ^3: **374.** $48\sqrt{11}$ սմ^3:

375. $a\sqrt{Q^2 - Qa^2}$: **376.** 105սմ^3: **377.** $16\sqrt{11}$ սմ^3: **378.** $\frac{a^3}{4}$: **379.** 1մ, 2մ, $\sqrt{5}$ մ, 3մ, 3մ, 3մ: **380.** $\frac{1}{3}d^3\sin^2\varphi\cdot\sqrt{3\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}$ կամ $\frac{1}{3}d^3\sin^2\varphi\sqrt{3-4\sin^2\varphi}$: **381.** Ցուցում: Եռանկյուն պրիզման լրացրեք մինչև զուգահեռանիստ: **382.** Ցուցում: Օգտվեք 381 խնդրից:

383. 6,12դմ^3: Ցուցում: Օգտվեք 322 խնդրից: **384.** $\frac{m^3\sqrt{3}}{27\sin^2\varphi\cos\varphi}$:

385. $\frac{16m^3}{3tg^2\varphi}$: **386.** $\frac{\sqrt{3}}{4}h^3\left(3tg^2\varphi - 1\right)$: **387.** $\frac{a^3n}{24tg\frac{180^\circ}{n}}\cdot\sqrt{\frac{1}{tg^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{tg^2\frac{180^\circ}{n}}}$:

388. $\frac{2h^3\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin(\varphi_1+\varphi_2)}{3tg^2\varphi_3}$: **389.** $\frac{2H^3\sin\alpha}{3tg\beta\cdot tg\gamma}$: **390.** $\frac{1}{3}a^3\sin^2\varphi\, tg\theta$:

391. ա) $\frac{a}{12}\sqrt{4a^2b^2-a^4-b^4}$; բ) $\frac{b^2}{12}\sqrt{4a^2-2b^2}$: **392.** 31:73:

393. ա) $\frac{S}{2}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$; բ) $\frac{\pi h^3}{4}$; գ) $\frac{S}{6}\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$: **395.** ≈7065լ:

396. $\frac{\pi a^3 tg\varphi_2}{24\sin^2\frac{\varphi_1}{2}\cdot tg\frac{\varphi_1}{2}}$: **397.** $\frac{a^3\pi}{24}\sin^3\varphi\,tg\theta$: **398.** $\frac{3}{2}$: **399.** 96πդմ³:

400. $2\pi r\frac{\ell-r}{\ell}$: **401.** $\frac{r^2+rr_1+r_1^2}{2rr_1}$: **402.** $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}tg\alpha\cdot ctg^3\frac{\alpha}{2}\cdot V$:

403. $\frac{\pi}{6}a^3\sin^3\alpha\,tg^3\frac{\beta}{2}$: **404.** $\pi r^3\sin 2\alpha\cos\alpha$: **405.** $\frac{\pi\ell^3}{6\cos^3\frac{\alpha}{2}}$:

406. $\frac{\pi}{H^2}\left(H^2+r^2\right)^2, \frac{\pi}{6H^3}\left(H^2+r^2\right)^3$: **407.** $\frac{4\pi}{\sin^2 2\alpha}$ սմ², $\frac{4\pi}{3\sin^2 2\alpha}$ սմ³:

408. $\frac{100\pi}{\sin^2 2\beta}$ սմ², $\frac{500\pi}{3\sin^3 2\beta}$ սմ³: **409.** ≈6,56մ: **410.** Մեծագույն ծավալ ունի գունդը, փոքրագույն ծավալ՝ կոնը: **411.** ա) Ոչ, բ) այո: *Ցուցում:* Համարելով գունդը համասեռ՝ համեմատեք դրա խտությունը ջրի խտության հետ:

Դժվարին խնդիրներ

412. *Ցուցում:* Ապացուցեք, որ այդ մեծությունը հավասար է գնդի տրամագծի քառակուսուն: **413.** Գնդի ներսում գտնվող շրջանագծի աղեղ: Գնդի տրամագիծը հավասար է գնդի կենտրոնի հեռավորությանը տրված ուղղից, իսկ դրա հարթությունն ուղղահայաց է տրված ուղղին: **414.** Գնդային մակերևույթ, որի կենտրոնը համընկնում է տրված գնդային մակերևույթի կենտրոնի հետ, իսկ շառավիղը

հավասար է $\frac{\sqrt{6}}{2}R$, որտեղ R-ը տրված գնդային մակերևույթի շառավիղն է: **416.** $r_3 \geq \frac{r_1 r_2}{\left(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}\right)^2}$, որտեղ r_3-ը գնդերից փոքրի շառավիղն է: **417.** $r=\frac{\sqrt{3}}{3}R$: **418.** $\frac{2\sqrt{3}(\lambda-1)-\sqrt{9\lambda^2-18\lambda+12}}{3(\lambda-2)}R$, երբ $\lambda \neq 2$ և $\frac{\sqrt{3}}{6}R$, երբ $\lambda=2$: **419.** $\frac{1}{12}$v, $\frac{1}{4}$v, $\frac{1}{4}$v և $\frac{5}{12}$v, որտեղ v-ն պրիզմայի ծավալն է: **420.** *Ցուցում*: Քառանիստը լրացրեք մինչև եռանկյուն պրիզմա և օգտվեք 381 խնդրից: **421.** *Ցուցում*: Ապացուցեք, որ ստացված քառանիստերն ունեն ընդհանուր հիմք և հավասար բարձրություններ: **422.** 5:3: **423.** *Ցուցում*: Որպես քառանիստի հիմք ընդունեք AB կողով որևէ նիստ և նկատեք, որ ո՛չ այդ նիստի մակերեսը, և ո՛չ էլ քառանիստի բարձրությունը կախված չեն C և D կետերի դիրքից: **424.** $\frac{5}{24}$ սմ^3: *Ցուցում*: Օգտվեք 420 խնդրից: **425.** *Ցուցում*: Հատույթի ներսում վերցրեք A կետը և տրոհեք բազմանիստը A ընդհանուր գագաթով բուրգերի: **426.** $\frac{16}{3}$ սմ^3: *Ցուցում*: Դիտարկեք պատկերի հատույթն այն հարթություններով, որոնք զուգահեռ են գլանի առանցքներին: **427.** $2\arcsin\frac{1}{3}$:

429. $\frac{\pi a^3}{12}\left(3ctg^2\frac{\alpha}{2}-\frac{\cos\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)$: **430.** $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$: **431.** *Ցուցում*: H կետն ընդունելով որպես սկզբնակետ՝ ներմուծեք քառանիստի գագաթների շառավիղ-վեկտորները: **432.** *Ցուցում*: Կիրառեք վեկտորներ և օգտվեք 431 խնդրից:

ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ ԵՎ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Զուգահեռ են: **3.** Չորս: **4.** Վեց: **5.** Մեկ կամ երեք: **6.** Վեց: **7.** Կարող են հատվել: **8.** α-ին զուգահեռ և A-ից α-ին իջեցրած ուղղահայացի միջնակետով անցնող հարթություն: **9.** Տրված երկու հարթություններին զուգահեռ և նրանցից հավասարահեռ հարթություն: **10.** Զուգահեռ կամ հատվող: **12.** Ոչ: **13.** Ոչ: **14.** $\frac{\sqrt{22}}{4}$: **16.** $\frac{a}{2}$: **17.** $\frac{am}{m+n}$ (m-ը համապատասխանում է այն հիմքին, որով անցնում է հարթությունը): **19.** 14սմ: **21.** Համընկնում են: **24.** 90^0: **25.** $\frac{a^2}{2}$: **26.** 1սմ: **27.** Երեք: **30.** Այո: **31.** 5: **32.** Կանոնավոր եռանկյուն, քառանկյուն, հնգանկյուն: **34.** $\frac{\sqrt{3(a^2+b^2)}}{2}$: **35.** 6սմ: **36.** $\arccos\frac{1}{3}$: **37.** ա) 5, բ) 99: **38.** ա) Ոչ, բ) այո: **39.** Ոչ: **40.** Ոչ: **41.** Ոչ: **42.** n-անկյուն բուրգ: **44.** $\frac{S}{\cos\alpha}$: **45.** 1սմ: **46.** 13սմ, $\frac{13\sqrt{3}}{2}$ սմ: **48.** Տանել հատույթներ գագաթով և հիմքի միջին գծերով: **49.** $4\sqrt{3}$ սմ^2: **50.** 5սմ: **51.** 416սմ^2: **52.** Հնգանկյուն: **53.** Յոթանկյուն: **54.** ա) 25-անկյուն բուրգ, բ) 17–անկյուն պրիզմա: **55.** $\sqrt{\frac{3}{2}}$: **56.** 6սմ: **57.** 30^0, 30^0, 120^0: **58.** $\sqrt{\frac{7}{15}}$: **59.** $2R^2\sin\alpha$: **60.** 500սմ^2: **61.** $\frac{R\sqrt{3}}{2}$: **62.** 10մ: **63.** $\frac{R}{3}$: **64.** 7: **65.** Այո. օրինակ. 3 միավորի կող ունեցող խորանարդը տրոհենք միավոր խորանարդների (դրանք 27 հատ են), վերցնենք դրանցից մեջտեղինը և նրա հետ ընդհանուր կող ունեցող 12 խորանարդները, և յուրաքանչյուրի համար վերցնենք բոլոր կողերը շոշափող գունդը: **66.** 1սմ: **67.** $\sqrt{5}$: **68.** b: **69.** $2b\sin 2\alpha$, խնդիրն իմաստ ունի, եթե $\alpha < \frac{\pi}{4}$:

70. $6a\sqrt{3}$: **71.** $\sqrt{\pi^2 r^2 + h^2}$: **72.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ սմ^3: **73.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ սմ^3: **74.** 3մ^3: **75.** $\frac{a^3}{8}$:

76. 6մ^2: **77.** 2սմ: **78.** 1մ^3: **79.** am^2: **80.** $\frac{1}{3}\sqrt{2SPQ}$: **81.** $\sqrt{11}$ սմ^3:

82. 1:7:19: **83.** ա) 8սմ^3, բ) 96սմ^3, գ) 384սմ^3: **84.** Խորանարդի՝ $\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$ անգամ: **86.** $\frac{\sqrt{5}}{4}$: **87.** $2\arcsin\frac{1}{6}$: **88.** $2\pi\sqrt{3}$, $\left(11+\sqrt{13}\right)\pi$:

89. $a^3\left(8-\frac{4\pi}{3}\right)$: **90.** ա) $\frac{3}{2}a^3\sqrt{3}$, բ) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$, գ) $arctg\frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{6}$:

91. ա) $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$, բ) $arctg\frac{\sqrt{6}}{2}$, գ) $\frac{\pi}{3}$, դ) $\pi-\arccos\frac{1}{4}$, ե) $\frac{5\sqrt{3}}{12}a$, զ) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$,

է) $\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$: **92.** $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$: **93.** $(x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=14$: **94.** $\left(-\frac{1}{2},-1;-\frac{3}{2}\right)$,

$\frac{\sqrt{14}}{2}$: **95.** $B_1(5;1;-2)$, $C(-1;2;2)$: **96.** ա) $A_1(-1;2;1)$, $B_1(0;1;3)$,

$D(2;1;-2)$, $D_1(0;3;0)$, բ) $A_1\left(-4;\frac{3}{2};0\right)$, $B\left(-1;\frac{1}{2};0\right)$, $C_1\left(-2;\frac{3}{2};2\right)$,

$D\left(-1;-\frac{1}{2};2\right)$: **97.** $2\pi R\left(h+\frac{1}{2}\sqrt{h^2+4R^2}\right)$, $\frac{2}{3}\pi R^2 h$: **98.** $\frac{25}{19}\approx 1{,}3\%$:

99. $\sqrt{Rr}$: **100.** $\frac{R}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$ և $\frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$:

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԳԼՈՒԽ I

Կոորդինատների մեթոդը 3

§ 1 Կետի կոորդինատները և վեկտորի կոորդինատները 3

1.Կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգը տարածության մեջ 5

2.Վեկտորի կոորդինատները 6

3.Վեկտորների կոորդինատների և կետերի կոորդինատների կապը 8

4.Պարզագույն խնդիրներ կոորդինատներով 10

5.Հարթության վրա գծի հավասարումը 12

Հարցեր և խնդիրներ 19

§ 2 Վեկտորների սկալյար արտադրյալը 19

6.Վեկտորների կազմած անկյունը 20

7.Վեկտորների սկալյար արտադրյալը 22

8.Ուղիղների և հարթությունների կազմած անկյունների հաշվումը 24

Խնդիրներ 29

§ 3 Շարժումներ 29

Հարթության շարժումը

9.Հարթության արտապատկերումն իր վրա 30

10.Շարժման հասկացությունը 32

11.Վերադրումները և շարժումները 34

12.Զուգահեռ տեղափոխում և պտույտ 35

Տարածության շարժումը

13.Կենտրոնային համաչափություն 36

14.Առանցքային համաչափություն 37

15.Հայելային համաչափություն 38

16.Զուգահեռ տեղափոխում 39

Խնդիրներ 40

Կառուցումներ հարթության վրա 41

Հարցեր գլուխ I-ի վերաբերյալ 43

Լրացուցիչ խնդիրներ

ԳԼՈՒԽ II

Գլան, կոն և գունդ 46

§ 1 Գլան 46

17.Գլանի հասկացությունը 48

18.Գլանի մակերևույթի մակերեսը 49

Խնդիրներ 51

§ 2 Կոն 51

19.Կոնի հասկացությունը 53

20.Կոնի մակերևույթի մակերեսը 54

21.Հատած կոն 55

Խնդիրներ

§ 3 Գնդային մակերևույթ 58
22. Գնդային մակերևույթ և գունդ 58
23. Գնդային մակերևույթի հավասարումը 58
24. Գնդային մակերևույթի և հարթության փոխադարձ դասավորությունը 59
25. Գնդային մակերևույթի շոշափող հարթությունը 61
26. Գնդային մակերևույթի մակերեսը 62
Խնդիրներ 63
Հարցեր գլուխ II-ի վերաբերյալ 65
Լրացուցիչ խնդիրներ 66
Համակցված խնդիրներ բազմանիստերի, գլանի, կոնի և գնդի վերաբերյալ 69

ԳԼՈՒԽ III
Մարմինների ծավալները
§ 1 Ուղղանկյունանիստի ծավալը 72
27. Ծավալի հասկացությունը 72
28. Ուղղանկյունանիստի ծավալը 74
Խնդիրներ 76

§ 2 Ուղիղ պրիզմայի և գլանի ծավալները 77
29. Ուղիղ պրիզմայի ծավալը 77
30. Գլանի ծավալը 78
Հարցեր և խնդիրներ 80

§ 3 Թեք պրիզմայի, բուրգի և կոնի ծավալները 81
31. Մարմինների ծավալների հաշվումը հաջորդականության սահմանի միջոցով 81
32. Թեք պրիզմայի ծավալը 82
33. Բուրգի ծավալը 84
34. Կոնի ծավալը 87
Խնդիրներ 89

§ 4 Գնդի ծավալը և գնդային մակերևույթի մակերեսը 93
35. Գնդի ծավալը 93
36. Գնդային սեգմենտի, գնդային շերտի և գնդային սեկտորի ծավալները 94
37. Գնդային մակերևույթի մակերեսը 96
38. Սեգմենտային մակերևույթ և գնդային գոտի 97
Հարցեր և խնդիրներ 100
Հարցեր գլուխ III-ի վերաբերյալ 101
Լրացուցիչ խնդիրներ 102
Համակցված խնդիրներ բազմանիստերի, գլանի, կոնի և գնդի վերաբերյալ 104
Դժվարին խնդիրներ 106
Դասընթացի կրկնության հարցեր և խնդիրներ 108
Հավելված. Երկրաչափության աքսիոմների մասին 115
Պատասխաններ և ցուցումներ 127

Երկրաչափության 9-րդ դասարանի դասագրքի բովանդակությունը

Ներածություն
1.Տարածաչափության առարկան, 2.Տարածաչափության աքսիոմները, 3.Որոշ հետևանքներ աքսիոմներից:
Ուղիղների և հարթությունների զուգահեռությունը
4.Զուգահեռ ուղիղները տարածության մեջ, 5.Երեք ուղիղների զուգահեռությունը, 6.Ուղղի և հարթության զուգահեռությունը, 7.Խաչվող ուղիղներ, 8.Համուղղված կողմերով անկյուններ, 9.Ուղիղների կազմած անկյունը, 10.Զուգահեռ հարթություններ, 11.Զուգահեռ հարթությունների հատկությունները, 12.Քառանիստ, 13.Զուգահեռանիստ, 14.Հատույթների կառուցման խնդիրներ:
Ուղիղների և հարթությունների ուղղահայացությունը
15.Ուղղահայաց ուղիղները տարածության մեջ, 16.Զուգահեռ ուղիղներ՝ հարթությանն ուղղահայաց, 17.Ուղղի և հարթության ուղղահայացության հայտանիշը, 18.Թեորեմ հարթությանն ուղղահայաց ուղղի մասին, 19.Կետի հեռավորությունը հարթությունից, 20.Երեք ուղղահայացների մասին թեորեմը, 21.Ուղղի և հարթության կազմած անկյունը, 22.Երկնիստ անկյուն, 23.Երկու հարթությունների ուղղահայացության հայտանիշը, 24.Ուղղանկյունանիստ:
Բազմանիստեր
25.Բազմանիստի հասկացությունը, 26.Երկրաչափական մարմին, 27.Պրիզմա, 28.Բուրգ, 29.Կանոնավոր բուրգ, 30.Հատած բուրգ, 31.Համաչափությունը տարածության մեջ, 32.Կանոնական բազմանիստի հասկացությունը, 33.Կանոնական բազմանիստերի համաչափության տարրերը,
Վեկտորները տարածության մեջ
34.Վեկտորի հասկացությունը, 35.Վեկտորների հավասարությունը, 36.Վեկտորների գումարումը և հանումը, 37.Մի քանի վեկտորների գումարը, 38.Վեկտորի բազմապատկումը թվով, 39.Համահարթ վեկտորներ, 40.Զուգահեռանիստի կանոնը, 41.Վեկտորի վերածումն ըստ երեք տարահարթ վեկտորների,
Հավելված Տարածական պատկերների գծապատկերումը
1.Պատկերի զուգահեռ պրոյեկցիան, 2.Պատկերի գծապատկերը, 3.Հարթ պատկերների գծապատկերումը, 4.Տարածական պատկերների գծապատկերումը

Երկրաչափության 10-րդ դասարանի դասագրքում կատարված փոփոխությունները

Ավելացված կետերը՝ 5, 9-12, *38*:
Փոփոխված կետերը՝ 7, *31-36*:
Փոխադրված և ավելացված խնդիրները՝ 42-65, 115-124, 310, *315-317*, *320*, *321*, *350-353*, *369-372*, *կրկնութ. 1-100*:

13000

Աբաճասյան Լևոն Սերգեյի
Բուտուգով Վալենտին Ֆյոդորի
Կադոմցև Սերգեյ Բորիսի
Կիսելյովա Լյուդմիլա Սերգեյի
Պոզնյակ Էդուարդ Գեներիխի

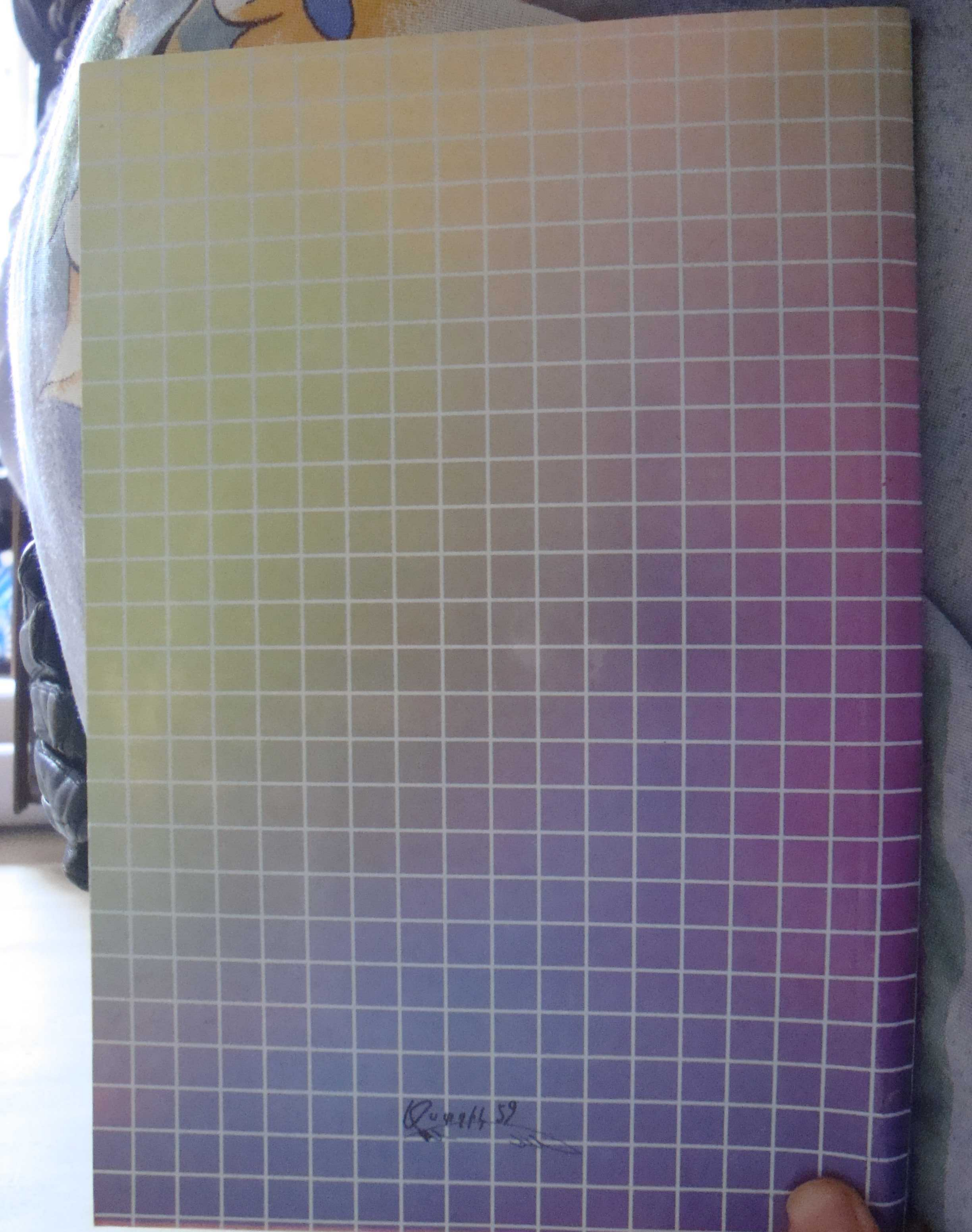
Հրատարակումը նախապատրաստվել է
ակադեմիկոս *Ա. Ն. Տիխոնովի* գիտական ղեկավարությամբ

Երկրաչափություն

Հանրակրթական դպրոցի **10**-րդ դասարանի դասագիրք

Թարգմանված է ռուսերեն 9-րդ հրատարակությունից:
Դասագիրքը համապատասխանեցված է առարկայական
ծրագրին, կատարված են փոփոխություններ:

Թարգմանությունը, փոփոխությունը և խմբագրումը՝
Սարիբեկ Հակոբյանի
Մեթոդական մշակումը՝ **Ռիտա Խաչատրյանի**
Խորհրդատվությունը՝ **Սամվել Հարությունյանի**
Համակարգչային ձևավորումը՝ **Գոհար Խաչատրյանի**

Հրատարակիչ-տնօրեն Ս. Հ. Չունգուրյան
Վերստուգող սրբագրիչ Ռ. Ս. Հակոբյան

«**Աստղիկ գրատուն**» հրատարակչություն (Երևան, Նորք, 2-րդ նրբանցք, տ. 32)